

ТЕМИРБЕКОВ Н.М.

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ**

**Ответственный редактор
доктор физико-математических наук Ш.С. Смагулов**

**Республика Казахстан
Алматы
2000**

УДК 532.546

ББК 22.19

Т32

Темирбеков Н.М.

Т32 Приближенные методы решения уравнений вязкой жидкости в областях со сложной геометрией.-Алматы, 2000.-143 с.
ISBN 9965-408-82-3.

В данной монографии изучаются вопросы численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях с пористой средой. Характерными для таких задач являются присутствие в уравнении движения жидкости члена с быстроменяющимися коэффициентами и сложная геометрия области. Рассматриваются эффективные численные методы решения этой задачи. Метод фиктивных областей используется как метод моделирования граничного условия для давления для уравнений Навье-Стокса. Разработана разностная схема основанная на методе разделения области, предназначенная для уравнений Навье-Стокса с разрывными коэффициентами. Численное моделирование конвективного теплообмена вязкой жидкости в реакторах с пористой средой с криволинейными границами проведен методом адаптивных криволинейных сеток.

Данные методы позволяют осуществить распараллеливание процесса решения задачи при использовании сети ПЭВМ, которые интенсивно внедряются в практику вычислений в последние годы.

Книга предназначена для научных работников в области вычислительной математики, вычислительной гидродинамики, а также аспирантов и студентов старших курсов механико-математических факультетов университетов.

ББК 22.19

Рецензенты: академик МИА, доктор технических наук, профессор Жумагулов Б.Т., доктор физико-математических наук, профессор Балакаева Г.Т.,

Т 1602120000
00(05)-00

©Темирбеков Н.М.

ISBN 9965-408-82- 3

2000

В В Е Д Е Н И Е

В основе рассмотрения пространственных движений вязкой несжимаемой жидкости в любой ортогональной криволинейной системе координат лежит обобщенный закон Ньютона. Большинство жидкостей и газов обладающих свойствами ньютоновских жидкостей описываются уравнениями Навье-Стокса динамики ньютоновской несжимаемой среды [1]. Решения задач о течении вязкой жидкости требует решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, причем нелинейность заключена стоящем в левой части уравнения инерционном члене, выражающем конвективную часть ускорения. Отхиживание этого члена или замена его приближенным линейным выражением приводит к линеаризации уравнений. Простейшим примером такой линеаризации может служить классическая задача Стокса. Линеаризация применяется в задачах о движении вязкой жидкости сквозь тонкие щели. Сюда относятся такие важные для практики вопросы, как фильтрация вязких жидкостей сквозь пористые среды, движение жидких смазочных масел в тонком зазоре между вращающимся кареткой и шариками подшипника и др. Если рассмотреть фильтрационное движение вязких жидкостей сквозь пористые среды, обычно под действием веса жидкости, в основе теории этих движений лежит закон Дарси[2]. Малая скорость или, точнее, малое рейнольдсово число протекания вязкой жидкости сквозь поры позволяет пренебрегать конвективными ускорениями, вызываемыми кривизной пор и переменной площадью их сечений.

При движении вязких жидкостей сквозь пористые среды со сравнительно большими средними размерами пор (крупнозернистые породы, галька, руда, каменный уголь) линейный закон Дарси уже не оправдывается и должен быть заменен более сложным нелинейным.

Методы решения задач фильтрационного движения воды под гидротехническими сооружениями, так же как и нефти при просачивании ее сквозь грунт, в настоящее время хорошо разработаны. Эти методы близки к методам применяемым в гидродинамике плоских безвихревых потоков идеальной жидкости [3,4,5].

В монографии [125] модель Дарси для фильтрационных течений выводится как следствие моделей Жуковского Н.Е. и Навье-Стокса при выполнении некоторых гипотез. Следовательно, для

ного изучения течения вязкой несжимаемой жидкости через пористые среды предпочтительнее использовать уравнения Навье-Стокса.

Данная книга посвящена численному моделированию течения вязкой несжимаемой жидкости через пористые среды, описываемых уравнениями Навье-Стокса. Характерным для таких задач является присутствие в уравнении движения жидкости члена с быстроменяющимися коэффициентами. Этот дополнительный член выражает сопротивление пористой среды, а в подобластях не занятой пористой средой он равен нулю. Для проведения сквозного счета на ЭВМ по всей области эффективным является рассматриваемая модель, так как течение в пористой среде и вне ее описывается одними уравнениями.

Для получения конкретных решений при интегрировании системы уравнений Навье-Стокса должны быть использованы граничные, а в случае нестационарного движения и начальные условия. Для частных классов задач о движении вязкой жидкости существуют строгие доказательства теорем о существовании и единственности решений [6]. Эти теоремы, помимо своего общего математического содержания, важны еще потому, что указывают, каковы должны быть присоединенные к дифференциальным уравнениям граничные и начальные условия, а так же и другие дополнительные требования, без выполнения которых решение задачи не будет единственным, а иногда и вообще может не существовать. Большое разнообразие неизбежно встающих перед практикой задач, наряду с обычными задачами внешнего и внутреннего обтекания, не позволяют считать вопросы математического обоснования исчерпанным.

В последнее время интенсивно развиваются методы приближенного численного решения уравнений гидрогазодинамики. Именно эти методы и составляют теперь, наряду с физическим экспериментом, главные инструменты исследования задач математической физики. Характерными чертами большинства практических задач являются многомерность и нелинейность, из-за чего возможность их аналитического решения становится, по существу, нереальной. Даже в случае линейных задач возникают затруднения, если расчетная область имеет достаточно сложную форму.

В численных методах, ориентированных на задачи гидрогазо-

динамики, к настоящему времени определился ряд направлений. Среди них выделяются методы конечных разностей, "крупных частиц", конечных элементов, интегральных соотношений, сеточно-вариационные и другие. Что касается динамики вязкой жидкости, то здесь наибольшие успехи связаны с применением метода конечных разностей, который и будет рассматриваться далее. Этот метод выделяется простотой и универсальностью своих основ и может обеспечить высокую точность результатов. Он применим для численного решения широкого класса задач, как для линейных, так и для нелинейных дифференциальных уравнений с различными граничными и начальными условиями. Принципы построения конечно-разностных аналогов краевых задач, такие как однородность и консервативность, впервые сформулированы в основополагающей работе А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [7]. Ими разработан интегро-интерполяционный метод построения разностных схем, позволяющий строить однородные и консервативные разностные схемы сквозного счета, которые дают возможность решать уравнения математической физики даже с разрывными коэффициентами. Г.И.Марчук [8] предложил близкий к приведенному выше метод построения разностных схем, обоснованный на полученном им интегральном тождестве. Теория линейных разностных схем, т.е. исследование таких свойств разностных схем, как аппроксимация и ее порядок, устойчивость, а следовательно сходимость посвящены монографии В.С.Рябенского и А.Ф.Филипова [9], А.А.Самарского [10,11], А.А.Самарского и В.Б.Андреева [12], А.А.Самарского и Е.С.Николаева [13], Г.И.Марчука [14], С.К.Годунова и В.С.Рябенского [15], Б.Л.Рождественского и Н.Н.Яненко [16], Н.Н.Яненко [17], Р.Рихтмайера [18], Ю.И.Шокина [19] и других как в СНГ, так и зарубежных математиков-вычислителей.

Корректность нелинейных разностных схем исследована в работах В.Н. Абрашина [20], [21], А.Д. Ляшко [22], Е.Г. Дьяконова [23], О.А. Ладыженской [6,37], Р.Темат [24], У.М. Султангазина [25], Ш. Смагулова [26,27], Н.Т. Данаева [36] и Б.Т. Жумагулова [21].

Построение эффективных численных алгоритмов для решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости представляет большой интерес специалистам в области вычислительной гидродинамики. При рассмотрении этой системы в естественных

переменных возникают вычислительные трудности, обусловленные отсутствием граничного условия для давления на твердых стенках и построением сетки в областях со сложной геометрией. С другой стороны система уравнений Навье-Стокса не является системой типа Коши-Ковалевской, поэтому непосредственное применение метода дробных шагов затруднительно.

Численному решению уравнений Навье-Стокса в переменных скорость, давление посвящены работы [28]-[35]. Для построения вычислительных алгоритмов используются различные способы. Например, метод искусственной сжимаемости в [28] метод маркеров и ячеек [29], методы основанные на ε -аппроксимации в [30,31] и другие методы [32]-[37].

Прежде всего следует отметить идею аппроксимации уравнений Навье-Стокса уравнениями эволюционного типа. Впервые эта идея была выдвинута в работе Н.Н.Владимировой, Б.Г.Кузнецова и Н.Н.Яненко [30]. Р.Темат в [31] предложил иной способ ε -аппроксимации уравнений Навье-Стокса. Показано, что при определенных условиях на τ, h, ε решение разностной схемы сходится к решению уравнений Навье-Стокса.

В работе Жумагулова Б.Т., Смагулова Ш.С., Данаева Н.Т., Кузнецова Б.Г. [36] исследована сходимость экономических конечно-разностных схем для уравнений Навье-Стокса.

О.А.Ладыженской и В.Я.Ривкиндо в [37] были исследованы различные разностные схемы дробных шагов. Некоторые разностные схемы типа дробных шагов и итерационные схемы изучены в работе Г.М.Кобелькова [33]. Для численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в естественных переменных широкое распространение получили конечно-разностные схемы расщепления по физическим процессам [32]. Одним из основных моментов реализации явной разностной схемы является то, что условие непротекания на границах учитывается точно, а условие прилипания-приближенно на расстоянии $h/2$ от границы по нормам, где h -шаг сетки по соответствующему направлению. При этом для нахождения компонент вектора скорости необходимо решать разностное уравнение Пуассона для давления со сложными краевыми условиями.

Метод фиктивных областей в настоящее время широко используется для численного решения в задачах математической физики

[38,39].

Впервые идея регуляризации области была выдвинута Э.Ч.Титчмаршем [40], для задачи на определение собственных значений, однако в таком виде, как метод фиктивных областей представлен в работах В.К.Саульева [41],[42], В.Я.Ривкинда [43] и В.Н.Лебедева [44], Mignot [45], Копченова В.Д [46], Руховец Л.А.[47], А.Н.Коновалова [48].

В.Я.Ривкиндром[43] рассмотрена задача Дирихле для эллиптического оператора второго порядка. Получены оценки близости решения исходной и вспомогательной задачи порядка $\sqrt{\epsilon}$. В.Д.Копченовым [46] получена более точная оценка порядка ϵ . В.И.Лебедевым для исходной задачи Дирихле для эллиптического уравнения предложен другой вариант вспомогательной задачи, полученный продолжением в фиктивную область по младшим коэффициентам. Отмечается, что он более удобен с точки зрения численной реализации задачи.

Метод фиктивных областей эллиптического уравнения второго порядка с краевыми условиями третьего рода рассматривался Л.А.Руховцом [47]. Наиболее общая постановка вспомогательной задачи для эллиптического уравнения второго порядка рассматривалась Бугровым А.Н.[49].

Вспомогательные задачи, полученные продолжением в фиктивную область по старшим коэффициентам, рассмотрены А.Н.Коноваловым [55], А.Н.Бугровым, А.Н.Коноваловым, В.А.Щербаком [56].

Работа [39] посвящена использованию метода фиктивных областей для моделирования краевых условий в задачах фильтрации.

Обоснованию метода фиктивных областей на конечно-разностном уровне посвящены работы Бугрова А.Н. [49], Ривкинда В.Я.[43], Утегенова К.У.[57] и др. Численная реализация вспомогательных уравнений, обусловленность которой, наряду с шагом сетки зависит так же от малого параметра ϵ . Вопрос построения итерационных схем, скорость сходимости которых не зависит от ϵ , рассмотрен в работе А.Н.Бугрова [53].

Большой цикл исследований посвящен методу фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Более глубокому анализу метода фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса посвящены работы Ш.Смагулова [50]-[56]. В

предлагаемых вариантах метода фиктивных областей на границе вспомогательной области ставились такие же граничные условия как на границе исходной, т.е. проблема постановки граничных условий для давления или полного напора оставалась.

В первом разделе этой книги рассматривается метод фиктивных областей как моделирования граничного условия для давления для уравнений Навье-Стокса.

Вопросам построения итерационных схем в методе фиктивных областей для уравнений четвертого порядка посвящены работы П.Н.Вабищевича и Т.Н.Вабищевича [38],[60].

В работе [61] рассматривается другой вариант метода фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса который основан на введении множителя Лагранжа. Затем строится итерационный процесс, с помощью которого находится решение вспомогательной задачи и введенный множитель. Проведены численные расчеты обтекания крылового профиля.

Отметим, что метод, близкий к методу фиктивных областей и названный методом фиктивных компонент, был предложен Г.И.Марчуком и Ю.А.Кузнецовым [62] и рассматривался в работах Ю.А.Кузнецова, А.М.Мацокина [63], В.П.Ильина, В.А.Короткевича [64], С.А.Войцеховского [65], Н.И.Николаевой [66].

В последние годы большое внимание уделяется методам декомпозиции сложной расчетной области на простые подобласти при численном решении краевых задач математической физики. Эффективными являются методы, которые позволяют свести процесс решения исходной задачи к последовательности задач, рассматриваемых в подобластях, имеющих более простую форму по сравнению с общей областью. Одним из таких методов является альтернирующий метод Шварца. В этом методе область D представляется в виде объединения конечного числа подобластей $D_m (m = 1, 2, \dots, M)$, причем каждая из подобластей имеет ненулевое пересечение с другими. Предельный случай этого метода, когда подобласти $D_m (m = 1, 2, \dots, M)$ имеют лишь общую границу называется методом разделения области. Альтернирующий метод Шварца известен в вычислительной математике уже многие годы [67],[68],[69],[70].

В настоящее время разработаны достаточно эффективные алгоритмы численного решения ряда задач математической физики

для случая простых областей. С учетом этого обстоятельства в последние годы осуществляется поиск модификаций метода Шварца, обладающих более высокой скоростью сходимости, по сравнению с его классическим вариантом.

Итерационные методы разделения расчетной области основываются на классическом альтернирующем методе Шварца. Доказательство сходимости решения этого метода в соболевских пространствах, дается в работах Лионса Ж.[71]. Сеточные аналоги метода Шварца применительно к эллиптическим уравнениям рассмотрены в работах Кузнецова Ю.А.[72], Польского Б.С.[73], где установлена конечная скорость сходимости итерационного процесса. Скорость сходимости которого оказывается тем выше, чем массивнее перекрытие подобластей. В работе Вабишевича П.Н.[75] на примере задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка рассмотрены некоторые модификации альтернирующего метода Шварца. Даются оценки скорости сходимости классического и аддитивного(асинхронного) вариантов метода.

В работе [76] был предложен аналог альтернирующего метода Шварца с разделением на две подобласти без перекрытия, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии. Построение этого метода существенно базировалось на использовании операторов типа Пуанкаре-Стеклова. Теория операторов Пуанкаре-Стеклова и на ее основе методы разделения на подобласти существенное развитие получили в [77]-[80], а также в других работах этих авторов, ими были разработаны методы разделения области вариационных задач не только для эллиптических уравнений второго порядка, но и для некоторых задач теории упругости и теории переноса.

В работе [81] строится и исследуется итерационный метод с разделением на подобласти (без налегания) решения смешанных краевых задач для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с большим параметром. Получены оценки ошибки решения в пространстве W_2^1 .

Легко заметить что методы Шварца и разделения области, фиктивных областей объединяются идеей перехода от решения задач в сложных областях к решению задач или последовательности задач в областях, форма границ которых была бы более простой. Некоторые из алгоритмов этих методов будут рассмотрены в данной книге для решения уравнений Навье-Стокса.

В настоящее время число научных работ по методу разделения области, методу фиктивных областей постоянно растет как в странах СНГ, так и за рубежом. Одной из причин этого роста является то, что данный метод часто позволяет осуществить распараллеливание процесса решения задачи при использовании сети ПЭВМ, которые интенсивно внедряются в практику вычислений в последние годы.

В большинстве работ, посвященных численному моделированию вязких течений, для дискретизации расчетной области используется криволинейная система координат, согласованная с границей. При этом, как правило, уравнения движения преобразуются относительно независимых переменных, а компоненты вектора скорости по прежнему записываются в декартовой системе координат [82]-[94]. Такой подход не накладывает каких-либо ограничений на систему координат, что упрощает процедуру дискретизации расчетной области.

Построение разностной сетки для решения численными методами нестационарных уравнений гидродинамики можно рассматривать как задачу определения в каждый момент времени t гладкого невырожденного преобразования некоторой области G_t в физическую область X_t ; $x : G_t \rightarrow X_t$, т.е. задание в области X_t некоторой криволинейной системы координат. Узлы разностной сетки при этом определяются точками пересечения координат. Разностная сетка должна быть в каком-либо смысле "хорошей", например, не сильно отличаться от лагранжевой, не очень деформироваться, сгущаться в областях с большими градиентами каких-либо физических величин и т.д.

Численное решение дифференциальных уравнений в областях со сложной геометрией границ эффективно осуществляется, если разностная сетка построена так, что два семейства координатных линий можно рассматривать как ортогональные. Задача построения ортогональных криволинейных сеток рассматривалась в работах [82]-[85].

В [82] конформное отображение было использовано для получения разностной сетки по зафиксированным точкам на контуре области. При этом нахождение параметрической сетки, которая должна быть преобразованием искомой, представляет определенные

трудности. В [83] параметрическая сетка предполагается фиксированной в процессе счета и отыскиваются не только внутренние узлы криволинейной сетки, но и узлы, лежащие на контуре области, кроме угловых точек, положение которых определяется заранее. В [84] рассматривается методика построения разностных сеток, близких к ортогональным с зафиксированными значениями координат узлов граничных точек. В указанных работах [82-84] задача построения криволинейной ортогональной сетки сводится к задаче минимизации функционала

$$F[x^1, x^2] = \int \omega \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} dq^1 dq^2,$$

где $\omega = 1$ в работах [82],[83], $\omega = |J|$ в [84]. J -Якобиан отображения

$$x : G \rightarrow X, g_{km} = \frac{\partial x^k}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial q^m},$$

$k, m = 1, 2$ (по повторяющимся индексам производится суммирование).

Возросшие требования к эффективности современных вычислительных алгоритмов численного решения дифференциальных задач, в частности, задач газовой динамики, привели к проблеме построения криволинейных координат, зависящих не только от геометрических характеристик области, но и от самого течения. Некоторые вариационные принципы построения отображений, сгущающихся в области больших градиентов, рассмотрены в [96], [97],[86].

В работе [88] на примере двумерных краевых задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка рассмотрены вопросы построения и применения адаптивных составных сеток. Вычислительная реализация основана на применении альтернирующего метода Шварца и метода фиктивных областей.

В [89] рассматривается задача о построении ортогональных координат для заданных областей с криволинейными границами, когда на Якобиан преобразования накладываются некоторые требо-

вания.

В работе [95] для изучения трехмерного течения в канале с нерегулярной геометрией используется численный метод интегрирования уравнений Навье-Стокса в криволинейной ортогональной системе координат. Описан эллиптический генератор расчетной сетки, близкой к ортогональной. Численно решена задача ламинарного течения несжимаемой жидкости через изогнутый канал квадратного сечения.

В третьем разделе для апробации предлагаемого метода решения уравнений Навье-Стокса в ортогональных криволинейных координатах численно решена тестовая задача Роуча [98]-[103]. Данная задача посвящена изучению ламинарного течения жидкости в областях со сложной геометрией, т.е. в плоском канале с плавно расширяющейся входной частью. Приведены результаты сравнения численных результатов с ранее известными численными решениями тестовой задачи Роуча.

В основе многих технологических процессов химической, нефтяной, металлургической, горнорудной, атомной и других отраслей промышленности лежит явление протекания жидкости или газа в пористой среде. Расчеты для проектирования химических реакторов с неподвижным слоем катализатора, реакторов насыпного типа для атомных электростанций и т.п. требуют подробных сведений о картине течения в этих аппаратах. Одно из основных направлений развития химической технологии, связанное с бурным прогрессом вычислительной техники, основывается на математическом моделировании технологических процессов. Располагая математической моделью, с помощью современных ЭВМ можно рассчитать характеристики процесса, отвечающие реальным размерам реактора и провести оптимизацию конечного результата по технологическим параметрам. Попытки математического моделирования работы химических реакторов всегда заканчиваются успешно.

Актуальность исследования вопросов аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем, а так же численная реализация начально-краевых задач для уравнений, описывающих течение жидкости через пористые среды, обусловлена многочисленными приложениями в проектировании химических реакторов с неподвижным слоем катализатора, фильтрации нефти в трещиновато-

пористых средах сложной формы и т.п.

Закон Дарси широко используется при исследовании всех видов воды через пористые среды: притока к грунтовым колодцам течения воды в почве при ее орошении, фильтрации через основания платин и т.д. Кроме того, оказалось, что движение нефти в подземных пластах следует закону Дарси.

Экспериментальному определению проницаемости по Дарси для различных пористых сред посвящены много работ [104]-[107]. Подробное изложение общих вопросов теории фильтрации можно найти в [4,5,108]. Теоретически исследованы течения в слое или реакторе в целом с использованием линейного и нелинейного закона Дарси для описания движения жидкости в неподвижном зернистом слое [105]-[112].

В работе В.П.Мясникова и В.Д.Котелкина [109] предложена и исследована гидродинамическая модель плоского химического реактора с сосредоточенным вводом и выводом газа. В зернистом слое используется линейный закон Дарси, а в свободном пространстве - приближение потенциального течения несжимаемой жидкости. В работе [112] рассмотрена гидродинамическая модель плоского реактора с центральным вводом потока. Определена область сходимости метода, исследовано влияние геометрических и динамических параметров на течение в нем.

Экспериментальные исследования [105,106,107,110,116] течения в пористых средах, в частности, через зернистые слои, с заданным распределением скорости на входе показывают, что на выходе из слоя имеют место значительные неоднородности профиля скорости, причем максимум достигается в пристеночной области. Эти изменения течения через зернистые слои, возникновение, так называемых, "ушей" не находят объяснения в рамках классического закона Дарси. Классическая теория фильтрации предполагает потенциальность течения вследствие малости скорости. Между тем, независимо от величин скорости такое предположение, вообще, говоря несправедливо в окрестности границ пористой среды и способна приводить к парадоксам. Например, струи, проходящие сквозь тело, замедляются, в результате чего за телом возникают существенные неоднородности скорости, сохраняющиеся вниз по потоку, что возможно только при вихревом движении. Но вихреобразование несовместимо с потенциальностью течения в замкнутой области,

занятой телом.

В работе Вайсмана А.М. и Гольдштика М.А. [111] развита теория, учитывающая роль инерционных эффектов при движении в пористой среде. Дана приближенная постановка задачи, выделяющая внутри пористой среды основную область течения, в которой справедлив классический закон Дарси. В качестве иллюстрации рассмотрен слабозмущенный поток жидкости в плоском канале со вставкой из пористого материала.

В работе Б.П.Герасимова и других [113] предложена математическая модель конвективного теплообмена в пористых средах в приближении Дарси-Буссинеска в переменных ψ, ω в осесимметричной области. В этой модели при описании движения жидкости или газа через пористую среду рассматривается совокупность двух взаимно проникающих сплошных сред-твердой и газообразной, действие которых друг на друга учитывается с помощью эффективных объемных сил. Уравнения сохранения количества энергии и движения выписываются феноменологически, а конкретизация отдельных членов ведется с использованием методов осреднения параметров некоторой микроскопической модели. Модель реализована в рамках программного комплекса NEPTUN. Приводятся результаты тестовых расчетов.

Монография Ершина Ш.А., Жапбасбаева У.К., Балакаевой Г.Т. [114] посвящена вопросам математического моделирования полного азротермохимического процесса в аппаратах с подвижным каталитическим слоем, проточные реакторы, автомобильные нейтрализаторы. Уравнения движения записаны в естественных переменных и для численного расчета использована схема расщепления по физическим процессам [32].

В работе Ширко И.В. [122] предложена система уравнений для описания стационарного изотермического течения вязкой жидкости и газа в недеформируемой среде. На входе в расчетную область заданы такие условия :

$$p = \text{const}, V_z = \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0,$$

на выходе- "мягкие" граничные условия. На основе метода потоков [123] разработан численный метод решения предложенных уравнений. При этом впервые в неоднотермической постановке проведен

учет вязких свойств протекающей среды во всей области течения. Для определения коэффициента эффективной вязкости предлагается полуэмпирическое выражение в виде функции пористости.

Численное моделирование конвективного теплообмена вязкой жидкости в реакторах с пористой средой с криволинейными границами до настоящего времени не проводилось. Характерным для таких задач является присутствие в уравнении движения жидкости члена с быстромменяющимися коэффициентами.

1. Моделирование краевых условий в задачах гидродинамики с помощью метода фиктивных областей.

Уравнения Навье -Стокса вязкой несжимаемой жидкости являются системой уравнений неклассического типа. Во-первых, она является нелинейной, неэволюционной системой, во-вторых в физической постановке отсутствуют граничные условия для давления. Это в свою очередь значительно затрудняет создание эффективного численного алгоритма для уравнений вязкой несжимаемой жидкости в естественных переменных. Уравнения Навье-Стокса для пространственных течений удобно решать в естественных переменных. Одной из актуальных проблем вычислительной математики является построение сетки в областях со сложной геометрией. В последнее время для численного решения уравнений математической физики в сложных областях применяется метод фиктивных областей [38]-[48]. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса впервые применен в работе [50]. Более полные ответы математическим вопросам метода фиктивных областей рассматривались в работе [55]. Метод фиктивных областей, как метод моделирования краевых условий для задачи фильтраций рассматривался в работе [39], а для задачи гидродинамики в переменных функция тока, вихря скоростей изучена в работе [56]. Впервые методу фиктивных областей как методу математического моделирования граничного условия для давления посвящена работа [181].

В настоящем разделе метод фиктивных областей рассматривается как метод регуляризации областей и моделирования краевых условий для давления или полного напора уравнениям вязкой несжимаемой жидкости. С помощью этого метода удается построить эффективный численный алгоритм для расчета давления или полного напора. По сути дела определение давления или полного напора сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

1.1 Линейные стационарные уравнения Стокса.

В области $\Omega \subset R^3$ с границей S ищем решения уравнения Стокса [6].

$$\mu \Delta v - \nabla p = f, \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, v|_S = 0 \quad (1.1.2)$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M}(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов и введем в нем скалярное произведение

$$[u, v] = \int_{\Omega} u_{x_k} \cdot v_{x_k} dx = \int_{\Omega} u_x \cdot v_x dx, \text{ норму}$$

$$\|v\|_{H(\Omega)}^2 = [v, v] = \|v_x\|_{\Omega}^2 = \|v_x\|^2.$$

Пополнение $\mathcal{M}(\Omega)$ в метрике $L_2(\Omega)$ и $H(\Omega)$ приводит нас к полным гильбертовым пространствам, которые обозначим $V_0(\Omega), V_1(\Omega)$.

Постановка вспомогательной задачи. В области D , строго охватывающей область $\Omega \subset D$ с границей S_1 будем решать следующую задачу:

$$\begin{aligned} \mu \Delta v^e - \nabla p^e &= f, & \text{в } \Omega \\ \mu \Delta v^e - \nabla p^e &= f, & \text{в } D_1 = D \setminus \Omega, \\ \operatorname{div} v^e &= 0, & \text{в } D. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

$$v^e \cdot \tau = 0, p^e = 0, \text{ на } S_1, \quad (1.1.4)$$

с условиями согласования

$$[v^e]|_S = 0, \quad [\mu^e \frac{\partial v^e}{\partial n} - \delta \cdot n p^e]|_S = 0, \quad (1.1.5)$$

где τ - касательный вектор к границе S_1 , $[\cdot]$ означает скачок при переходе через S , δ -метрический тензор, n - нормаль к границе S , f продолжен в D_1 с сохранением нормы $L_2(D_1)$

Введем множество бесконечно дифференцируемых соленоидальных в D вектор-функций $v(x)$, с касательными составляющими обращающихся в нуль на S :

$$M(D) = \{v(x) \in C^\infty(D), \operatorname{div} v = 0, v \cdot \tau = 0, x \in S\},$$

где τ -касательный вектор к границе S . Пространства, полученные замыканием $M(D)$ в нормах $L_2(D)$ и $\overset{0}{W}_2^1(D)$ обозначим через $V(D), V_1(D)$, их сопряженные пространства $V^*(D), V_1^*(D)$, причем $V(D)$ и $V^*(D)$ отождествляются. Здесь и в дальнейшем используются обозначения, взятые из работы [6],[144].

Продолжение уравнений (1.1.1), (1.1.2) в область D_1 , будем называть продолжением по фиктивной вязкости. Известно [129], [134] если $v(x) \in W_2^2(D_1) \cap V_1(D)$, $u(x) \in H_1(D)$, $S_1 \in C^2$, то

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} \cdot u \right) |_{S_1} = -k(x)(v, u), \quad x \in S_1. \quad (1.1.6)$$

где $k(x)$ - удвоенная средняя кривизна границы S_1 , $H_1(D)$ - множество векторов $u \in W_2^1(D)$, удовлетворяющих краевым условиям (1.1.4) и таких, что $\int_{S_1} u \cdot n ds = 0$.

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи (1.1.3) - (1.1.5) называется функция $v^\epsilon(x) \in V_1(D)$, удовлетворяющая следующему интегральному тождеству

$$-\mu \int_{\Omega} v_x^\epsilon \cdot \Phi_x dx - \frac{\mu}{\epsilon} \int_{D_1} v_x^\epsilon \cdot \Phi_x dx - \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) v^\epsilon \cdot \Phi ds = \int_D f \cdot \Phi dx, \quad (1.1.7)$$

с любой

$$\Phi \in H_1(D),$$

где f - продолжен нулем вне Ω .

Теорема 1.1. Пусть f и $k(x) \geq 0$ являются линейными функционалами над пространством $V_1(D)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1.3)-(1.1.5).

Доказательство. В интегральном тождестве (1.1.7) положим $\Phi = v^\epsilon$, в результате имеем:

$$\mu \|v_x^\epsilon\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu}{\epsilon} \|v_x^\epsilon\|_{D_1}^2 + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 dx = \int_D f \cdot v^\epsilon dx.$$

Используя неравенство Шварца, оценим:

$$\left| \int_D f v^\epsilon dx \right| \leq \delta \|v_x^\epsilon\|_D^2 + C_\delta \|f\|_{V_1^*(D)}^2$$

Отсюда имеем:

$$\|v^\epsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|v^\epsilon\|_{W_2^1(D_1)}^2 \leq C \|f\|_{V_1^*(D)}^2. \quad (1.1.8)$$

После этого в силу теоремы Рисса [6] легко доказывается теорема 1.1 и для решения имеет место оценка (1.1.8).

Далее уточним оценку (1.1.8) в смысле порядка ϵ . Для этого обращаемся к интегральному тождеству (1.1.7). Пусть $\psi = v^\epsilon$ в D_1 . Продолжим ψ в Ω с сохранением нормы $\|v^\epsilon\|_{W_2^1(D_1)}$, $\operatorname{div} v^\epsilon = 0$. Теперь в (1.1.7), положим $\Phi = \psi$,

$$\mu \int_{\Omega} v_x^\epsilon \cdot \psi_x dx + \frac{\mu}{\epsilon} \left(\int_{D_1} |v_x^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 dx \right) = (f, \psi)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\epsilon} \left(\int_{D_1} |v_x^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 dx \right) &\leq \mu \|v_x^\epsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_x\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{V_1^*(D)} \|\psi\|_{V_1(D)} \leq \\ &\leq C \left(\mu \|v_x^\epsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{V_1^*(D)} \right) \cdot \left(\int_{D_1} |v_x^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|v^\epsilon\|_{W_2^1(D_1)} \leq \epsilon C. \quad (1.1.9)$$

Теорема 1.2. Пусть $f \in L_2(D')$, $D' \subset D_1$, тогда обобщенное решение задачи (1.1.3)-(1.1.5) v^ϵ принадлежит $W_2^1(D_1')$ для $D_1' \subset D_1'$ и удовлетворяет уравнениям

$$\epsilon \Delta v^\epsilon - \nabla p^\epsilon = f, \quad \operatorname{div} v^\epsilon = 0 \text{ почти всюду в } D_1', \text{ где } p^\epsilon \in W_2^1(D_1')$$

Пусть D_1' -любая строго внутренняя подобласть области D_1' , фиксируем ее $D_1' \subset D_1$. Возьмем Φ в (1.1.7) в виде

$$\Phi = \operatorname{rot} (\xi^2 \operatorname{rot} v_\rho^\epsilon)_\rho,$$

где ρ -усреднение

$$v_\rho^\epsilon(x) = \int_{|x-y| \leq \rho} \omega_\rho(|x-y|) \cdot v^\epsilon(y) dy = \int_{|x-y| \leq \rho} \rho^{-n} \cdot \omega\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) v^\epsilon(y) dy$$

с достаточно гладким неотрицательным усредняющим ядром $\omega(|\eta|)$, равным нулю при $|\eta| \geq 1$ и таким, что интеграл от нее по всему пространству равен некоторой константе H умноженной на ρ^n

$$\int_D \omega\left(\frac{|x|}{\rho}\right) dx = H \rho^n,$$

$\xi(x)$ -дважды дифференцируемая непрерывная неотрицательная финитная в D'_1 функция, равная 1 в $D''_1 \subset D'_1$ и не превосходящая 1 во всем D'_1 .

Подставим взятое нами Φ в (1.1.7) и сделаем ряд преобразований, заметив, что операция усреднения перестановочна с операцией дифференцирования. Благодаря этому, имеем:

$$\begin{aligned} - \int_D f \cdot \Phi dx &= \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} v_x^\varepsilon \cdot \Phi_x dx = \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} v_x^\varepsilon [\text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon)]_{\rho x} dx = \\ &= \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} v_{\rho x}^\varepsilon [\text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon)]_x dx = - \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} \Delta v_\rho^\varepsilon \cdot \text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon) &= \xi^2 \text{rot} \text{rot} v_\rho^\varepsilon + \\ &+ \text{grad} \xi^2 \times \text{rot} v_\rho^\varepsilon = -\xi^2 \Delta v_\rho^\varepsilon + \text{grad} \xi^2 \times \text{rot} v_\rho^\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

так как

$$\text{div} v_\rho^\varepsilon = 0.$$

Поэтому из (1.1.10) учитывая (1.1.11) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx &= \\ = \int_{D'_1} [-f_\rho \text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon) + \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta v_\rho^\varepsilon \text{grad} \xi^2 \times \text{rot} v_\rho^\varepsilon] dx. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Оцениваем правую часть, по неравенству Коши, имеем

$$\left| \int_{D'_1} [-f_\rho \text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon)] dx \right| \leq \delta \int_{D'_1} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx + C_\delta \int_{D'_1} |f_\rho|^2 dx,$$

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \left| \int_{D'_1} \Delta v_\rho^\varepsilon \cdot \text{grad} \xi^2 \times \text{rot} v_\rho^\varepsilon dx \right| \leq \delta \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx + C_2 \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} |\nabla v_\rho^\varepsilon|^2 dx,$$

где C_δ и C_2 не зависят от ε .

Отсюда следует:

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D'_1} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \leq C < \infty.$$

Отсюда в свою очередь следует оценка производных второго порядка для v_ρ^ε

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{D'_1} \left(\frac{\partial^2 v_\rho^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \leq C < \infty.$$

Переходим к пределу в (1.1.12) при $\rho \rightarrow 0$. В результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{D_1'} \left(\frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \leq C < \infty. \quad (1.1.13)$$

Теперь тождество (1.1.7) перепишем следующим образом:

$$\int_{D_1'} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \Delta v^\varepsilon - f \right) \Phi dx = 0,$$

для любого $\Phi \in M(D_1'')$. Так как $M(D)$ -плотно в $M(D_1'')$ и $\frac{\mu}{\varepsilon} \Delta v^\varepsilon - f \in L_2(D_1'')$, то $\frac{\mu}{\varepsilon} \Delta v^\varepsilon - f$ есть градиент некоторой функции $p^\varepsilon \in W_2^1(D_1'')$, так что $\frac{\mu}{\varepsilon} \Delta v^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon = f$, где p^ε есть искомое давление. В области Ω вышесказанное можно исследовать аналогично.

Лемма 1.1. Имеет место оценка

$$\int_{D_1'} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \leq C \varepsilon^2. \quad (1.1.14)$$

Доказательство. Правую часть (1.1.12) оцениваем следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_1'} [-f_\rho \cdot \text{rot}(\xi^2 \text{rot} v_\rho^\varepsilon)] dx \right| &\leq \|f_\rho\|_{D_1'} \cdot \left[\int_{D_1'} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \right]^{1/2}, \\ \frac{\mu}{\varepsilon} \left| \int_{D_1'} \Delta v_\rho^\varepsilon \text{grad} \xi^2 \times \text{rot} v_\rho^\varepsilon dx \right| &\leq \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\int_{D_1'} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \|\nabla v_\rho^\varepsilon\|_{D_1'}. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{D_1'} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \leq C \sqrt{\varepsilon},$$

т.е.

$$\int_{D_1'} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \leq C \varepsilon^{1+1/2}.$$

Теперь снова обращаемся к (1.1.12), (1.1.15) и имеем

$$\int_{D_1'} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \leq C \varepsilon \left(C \varepsilon \left(\int_{D_1'} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \right)^{1/2} \leq C^{1+1/2} \cdot \varepsilon^{1+1/2+1/4}.$$

Далее рассуждая также, получим

$$\int_{D_1^*} \xi^2 (\Delta v_\rho^\varepsilon)^2 dx \leq C_1 \varepsilon^{1+1/2+1/4+1/8+}$$

Лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.3. Пусть $f \in L_2(D)$, $S, S_1 \in C^3$, $k(x) \geq 0$, тогда для решения задач (1.1.3)-(1.1.5) имеет место оценка

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}^2 + \|p^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}^2 + \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|p^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L_2(D)}^2$$

Доказательство. Нам достаточно вывести априорные оценки вблизи границ S_1 и S . Перепишем задачу (1.1.3), (1.1.4) в D_1

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\mu} \Delta v^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon &= f, \\ \operatorname{div} v^\varepsilon &= 0, \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

$$p^\varepsilon|_{S_1} = 0, v^\varepsilon \cdot \tau|_{S_1} = 0.$$

Применяя операцию дивергенции в (1.1.16), имеем:

$$\Delta p^\varepsilon = -\operatorname{div} f. \quad (1.1.17)$$

Отсюда легко выводим оценки первой производной вблизи границы S_1 . То есть

$$\int_{D_1^*(S_1)} |\nabla p^\varepsilon|^2 dx \leq C \|f\|_{L_2(D_1)}$$

где $D_1^*(S_1)$ -область вблизи границы S_1 с диаметром δ . Теперь из (1.1.16) для v^ε в D_1 получаем задачу

$$\Delta v^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\mu} (\nabla p^\varepsilon + f), \quad \operatorname{div} v^\varepsilon = 0, \quad v^\varepsilon \cdot \tau|_{S_1} = 0, \quad (1.1.18)$$

$$p^\varepsilon|_{S_1} = 0$$

Задача (1.1.18) подробно изучена в работе [128]. Используя результаты, полученные в [128], получим:

$$\|v^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1^*(S_1))} \leq C \varepsilon \|f\|_{L_2(D_1)} \quad (1.1.19)$$

Оценки вблизи границы S получаются точно так же как в работе [55]. Итак, теорема 1.3 полностью доказана.

Оценка скорости сходимости решения в методе фиктивных областей.

Теорема 1.4. Пусть выполнены все условия теоремы 1.3. Тогда имеет место оценка:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{W_2^1(\Omega)} + \|p^\varepsilon - p\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \varepsilon. \quad (1.1.20)$$

Причем это оценка скорости сходимости неулучшаема.

Доказательство. Обозначим $v^\varepsilon - v = W$, $p^\varepsilon - p = \pi$. В силу уравнения (1.1.1)-(1.1.2) и (1.1.3)-(1.1.5) для W, π в области Ω получаем задачу:

$$\mu \Delta W - \nabla \pi = 0, \quad \operatorname{div} W = 0, \quad (1.1.21)$$

$$W|_S = v^\varepsilon|_S,$$

причем $\|v^\varepsilon\|_{W_2^{3/2}(S)} \leq C\varepsilon$.

В силу теоремы устойчивости по граничным данным решения уравнений Стокса [6] имеем:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{W_2^1(\Omega)} + \|p^\varepsilon - p\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|v^\varepsilon\|_{W_2^{3/2}(S)} \leq C\varepsilon.$$

Теорема 1.4 доказано.

Спектральная задача. Рассмотрим оператор

$$Aw_j = \begin{cases} \mu \Delta \omega_j - \nabla p_j, & \text{в } \Omega, \\ \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \omega_j - \nabla p_j, & \text{в } D_1, \end{cases} \quad (1.1.22)$$

$$\operatorname{div} \omega_j = 0, \quad \text{в } D = D_1 \cup \Omega.$$

$$\omega_j \cdot \tau|_S = 0, \quad p|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$[\omega_j]|_S = 0, \quad \left[\left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial n} - \delta \cdot p \cdot n \right) \right]_S = 0,$$

Оператор A -самосопряженный. Рассмотрим теперь для этого оператора задачу на собственные значения

$$A\omega_j = -\lambda_j \omega_j \quad (1.1.23)$$

Обобщенное решение задачи (1.1.23) удовлетворяет формуле

$$\mu(\nabla\omega_j, \nabla\Phi)_\Omega + \frac{\mu}{\varepsilon} \left[(\nabla\omega_j, \nabla\Phi)_{D_1} + \int_{S_1} k(x)(\omega_j \cdot \Phi) ds \right] = \lambda_j(\omega_j, \Phi)_D, \quad \forall \Phi \in V_1(D),$$

Множество функций $\{\omega_j\}$ образует базис, и справедлива оценка

$$\|Av^\varepsilon\|_{L_2(D)} \geq C \left(\|v^\varepsilon\|_{V_1(D)} + \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)} + \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \|p^\varepsilon\|_{L_2(D)} + \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(D_1)} + \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (1.1.24)$$

Если S, S_1 -достаточно гладкие, то решение задачи (1.1.22), (1.1.23) достаточно гладкое в каждой из областей Ω, D_1 [6]. Справедливо следующее разложение в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u(x), \omega_k)_D \omega_k, \quad \forall u(x) \in V_1(D).$$

1.2 Моделирование граничных условий для полного напора $P + \frac{|v|^2}{2} = Q$ и давления для стационарных уравнений Навье-Стокса.

Предлагается один способ математического моделирования граничных условий для полного напора или давления для уравнений Навье-Стокса методом фиктивных областей. На границе вспомогательной области S_1 задается полный напор или давление и касательная составляющая вектора скорости.

Постановка задачи. В области Ω с границей S рассмотрим трехмерную стационарную модель течения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} v \times \operatorname{rot} v &= \mu \Delta v - \nabla Q + f, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad Q = p + \frac{|v|^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

с граничным условием

$$v|_S = 0. \quad (1.2.2)$$

Задачу (1.2.1), (1.2.2) решаем методом фиктивных областей в D

$$v^\varepsilon \times \operatorname{rot} v^\varepsilon = \operatorname{div}(\mu^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) - \nabla Q^\varepsilon + f, \quad \operatorname{div} v^\varepsilon = 0. \quad (1.2.3)$$

$$Q^\epsilon = \frac{|v^\epsilon|^2}{2} + p^\epsilon,$$

Уравнение (1.2.3) решается со следующими граничными условиями и условиями согласования

$$v^\epsilon \cdot \tau|_{S_1} = 0, \quad Q^\epsilon|_{S_1} = 0, \quad (1.2.4)$$

$$[\mu^\epsilon \nabla v^\epsilon - Q^\epsilon \delta \cdot n]|_S = 0, \quad [v^\epsilon]|_S = 0, \quad (1.2.5)$$

где

$$\mu^\epsilon = \begin{cases} \mu & \text{в } \Omega \\ \frac{\mu}{\epsilon} & \text{в } D_1, \quad D = D_1 \cup \Omega. \end{cases}$$

f -продолжаем вне Ω , с сохранением нормы в $L_2(\Omega)$.

Определение 1.2. Обобщенным решением задачи (1.2.3)-(1.2.5) называется функция $v^\epsilon \in V_1(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D (v^\epsilon \times \operatorname{rot} v^\epsilon) \cdot \varphi dx + \int_D \mu^\epsilon \nabla v^\epsilon \cdot \nabla \varphi dx + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) v^\epsilon \cdot \varphi ds = \int_D f \cdot \varphi dx. \quad (1.2.6)$$

для

$$\forall \varphi \in V_1(D)$$

Теорема 1.5. Пусть $f \in V_1^*(D)$, S, S_1 -кусочно гладкие, $k(x)$ -удвоенная кривизна границы S_1 , неотрицательная функция. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (1.2.3)-(1.2.5), и для решения имеет место оценка

$$\|v^\epsilon\|_{V_1(D)} + \frac{1}{\epsilon} \|v^\epsilon\|_{W_2^1(D_1)} \leq C \|f\|_{V_1^*(D)}.$$

Доказательство. Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ базис в $V_1(D)$. Тогда приближенное решение задачи (1.2.3)-(1.2.5) будем искать в виде конечной суммы

$$v_m^\epsilon = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} (v_m^\epsilon \times \operatorname{rot} v_m^\epsilon, \omega_i) + \int_D \mu^\epsilon (\nabla v_m^\epsilon \cdot \nabla \omega_i) dx + \\ + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) (v_m^\epsilon \cdot \omega_i) ds - \int_D (f \cdot \omega_i) dx = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Мы собираемся показать, что система алгебраических уравнений (1.2.8) имеет хотя бы одно решение. В этих целях используем лемму о неподвижных точках Брауэра [144]. Умножим (1.2.8) на ξ_i .

суммируем по $i = 1, \dots, m$ и составим сумму:

$$\begin{aligned} (P(\xi), \xi) &= (v_m^\epsilon \times \operatorname{rot} v_m^\epsilon, v_m^\epsilon) + \int_D \mu^\epsilon (\nabla v_m^\epsilon \cdot \nabla v_m^\epsilon) dx - \\ &- \int_D (f, v_m^\epsilon) dx + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) |v_m^\epsilon|^2 ds = \int_D \mu^\epsilon |\nabla v_m^\epsilon|^2 dx + \\ &+ \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) |v_m^\epsilon|^2 ds - \int_D (f \cdot v_m^\epsilon) dx. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Имеем:

$$\int_D (f \cdot v_m^\epsilon) dx \leq \|f\|_{V_1(D)} \cdot \|v_m^\epsilon\|_{V_1(D)}.$$

Следовательно,

$$(P(\xi), \xi) \geq \int_D \mu^\epsilon |\nabla v_m^\epsilon|^2 dx + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) |v_m^\epsilon|^2 dx - C_1 \|v_m^\epsilon\|_{V_1(D)} \geq 0,$$

а значит $(P(\xi), \xi) \geq 0$, причем последнее условие выполняется при $|\xi| = \rho$, где ρ достаточно велико. Итак, существует функция v_m^ϵ с $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, удовлетворяющая равенству (1.2.8) и, кроме того, имеет место неравенство

$$\int_D \mu^\epsilon |\nabla v_m^\epsilon|^2 dx + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) |v_m^\epsilon|^2 dx \leq C \|f\|_{V_1(D)}^2. \quad (1.2.10)$$

Предельный переход. Из (1.2.10) следует, что v_m^ϵ — ограничено в $V_1(D)$. Следовательно, мы можем выбрать такую последовательность v_k^ϵ , что $v_k^\epsilon \rightarrow v^\epsilon$ слабо в $V_1(D)$, при $k \rightarrow \infty$.

В силу теоремы вложения $v_k^\epsilon \rightarrow v^\epsilon$ сильно в $L_4(D)$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть i фиксировано, $k > i$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_D (v_k^\epsilon \times \operatorname{rot} v_k^\epsilon \cdot \omega_i) dx + \int_D \mu^\epsilon (\nabla v_k^\epsilon \cdot \nabla \omega_i) dx + \\ + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x) (v_k^\epsilon \cdot \omega_i) dS - \int_D f \cdot \omega_i dx = 0. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Покажем, что имеет место

$$\int_D (v_k^\epsilon \times \operatorname{rot} v_k^\epsilon \cdot \omega_i) dx = \int_D (v^\epsilon \times \operatorname{rot} v^\epsilon \cdot \omega_i) dx.$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \int_D (v_k^\epsilon \times \operatorname{rot} v_k^\epsilon - v^\epsilon \times \operatorname{rot} v^\epsilon \cdot \omega_i) dx = \\ = \int_D ((v_k^\epsilon - v^\epsilon) \times \operatorname{rot} v_k^\epsilon \cdot \omega_i) dx + \int_D (v^\epsilon \times (\operatorname{rot} v_k^\epsilon - \operatorname{rot} v^\epsilon) \cdot \omega_i) dx, \end{aligned}$$

$$\left| \left(\int_D (v_k^\varepsilon - v^\varepsilon) \times \operatorname{rot} v_k^\varepsilon \cdot \omega_i \right) dx \right| \leq \\ \leq \|v_k^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_4(D)} \|\operatorname{rot} v_k^\varepsilon\|_{L_2(D)} \|\omega_i\|_{L_4(D)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \\ \int_D (v^\varepsilon \times (\operatorname{rot} v_k^\varepsilon - \operatorname{rot} v^\varepsilon) \cdot \omega_i) dx \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Теперь перейдем к пределу в (1.2.11) при $k \rightarrow \infty$, получим:

$$\int_D (v^\varepsilon \times \operatorname{rot} v^\varepsilon \cdot \omega_i) dx + \int_D \mu^\varepsilon (\nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \omega_i) dx + \\ + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{S_1} k(x) (v^\varepsilon \cdot \omega_i) ds - \int_D (f \cdot \omega_i) dx = 0,$$

для любого i .

Теорема 1.5 доказана.

Теперь получим более точную оценку в смысле порядка ε . Обращаемся к интегральному тождеству (1.2.6). Построим функцию $\psi^\varepsilon(x)$ в D следующим образом. Положим $\psi^\varepsilon = v^\varepsilon(x)$ в D_1 и продолжим в Ω , сохраняя норму

$\|\psi^\varepsilon\|_{V_1(D)} \leq C \|\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}$. Положим в (1.2.6) $\varphi = \psi^\varepsilon$, в результате получим:

$$\int_D (v^\varepsilon \times \operatorname{rot} v^\varepsilon \cdot \psi^\varepsilon) dx + \mu^\varepsilon \int_\Omega (\nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \psi^\varepsilon) dx + \\ + \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\int_{D_1} |\nabla v^\varepsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\varepsilon|^2 ds \right) = \int_D f \cdot \psi^\varepsilon dx. \quad (1.2.12)$$

Оцениваем интегралы, входящие в (1.2.12), учитывая свойства функции ψ^ε .

$$\left| \int_D (f \cdot \psi^\varepsilon) dx \right| \leq \|f\|_{V_1(D)} \|\psi^\varepsilon\|_{V_1(D)} \leq C \|f\|_{V_1(D)} \|\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}$$

$$\left| \int_\Omega (\nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \psi^\varepsilon) dx \right| \leq \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \psi^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq C \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\psi^\varepsilon\|_{V_1(D)} \leq C \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D)} \|\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}$$

$$\left| \int_D (v^\varepsilon \times \operatorname{rot} v^\varepsilon \cdot \psi^\varepsilon) dx \right| \leq \|\operatorname{rot} v^\varepsilon\|_{L_2(D)} \|v^\varepsilon\|_{L_4(D)} \cdot \|\psi^\varepsilon\|_{L_4(D)} \leq$$

$$\leq C \|\operatorname{rot} v^\varepsilon\|_{L_2(D)} \|v^\varepsilon\|_{L_4(D)} \|\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}.$$

Подставляя в (1.2.12), получим:

$$\frac{\mu}{\epsilon} \|v^\epsilon\|_{W_2^1(D_1)} \leq C \frac{\mu}{\epsilon} \left(\int_{D_1} |\nabla v^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 ds \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{V_1(D_1)}. \quad (1.2.13)$$

Замечание. Единственность обобщенного решения задач (1.2.3)-(1.2.5) следует при малом $\|f\|_{V_1(D)}$ или при достаточно большом $\mu > 0$. Заметим, что в оценках (1.2.13) постоянные не зависят от ϵ .

Следовательно, из последовательности $\{v^\epsilon\}$ можно выделить подпоследовательности $\{v^{\epsilon_i}\}$, для которых при $\epsilon_i \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} v^{\epsilon_i} &\rightarrow v && \text{слабо в } W_2^1(\Omega) \\ v^{\epsilon_i} &\rightarrow v && \text{сильно в } L_4(\Omega) \\ v^{\epsilon_i} &\rightarrow 0 && \text{сильно в } L_2(S) \\ v^{\epsilon_i} &\rightarrow 0 && \text{слабо в } W_2^1(D_1). \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Теперь переходим в интегральном тождестве (1.2.6) к пределу при

$\epsilon_i \rightarrow 0$ и φ положим из класса $\dot{V}_1(\Omega)$, в результате заметим, что v является обобщенным решением задач (1.2.1), (1.2.2).

Оценка скорости сходимости решения задачи (1.2.3)-(1.2.5). Имеет место следующая

Теорема 1.6. Пусть выполнены все условия теоремы 1.5. Тогда имеет место оценка

$$\|v^\epsilon - v\|_{W_2^1(\Omega)} + \|p^\epsilon - p\|_{L_2(\Omega)} \leq C\epsilon, \quad (1.2.15)$$

при достаточно большом $\mu > 0$, причем оценка (1.2.15) неулучшаемая в смысле порядка ϵ .

Доказательство. Заметим, что

$$v^\epsilon|_S \in W_2^{1/2}(S), \quad \|v^\epsilon\|_{W_2^{1/2}(S)} \leq C\epsilon.$$

Это следует в силу (1.2.13) и из теоремы вложения. Теперь построим $\psi^\epsilon(x)$, которая $v^\epsilon|_S = \psi^\epsilon(x)|_S$. $\psi^\epsilon(x)$ продолжаем вовнутрь Ω с сохранением нормы [6]

$$\|\psi^\epsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|\psi^\epsilon\|_{W_2^{1/2}(S)} \leq C\epsilon, \quad \operatorname{div} \psi^\epsilon = 0$$

Обозначим $u^\epsilon = v^\epsilon - \psi^\epsilon$, для u^ϵ выполняются условия $\operatorname{div} u^\epsilon = 0$, $u^\epsilon|_S = 0$.

Положим в интегральном тождестве (1.2.6)

$$\varphi \in \dot{V}_1(\Omega), \varphi = 0 \text{ в } D_1, v^\epsilon = u^\epsilon + \psi^\epsilon,$$

имеем

$$\int_{\Omega} ((u^\epsilon + \psi^\epsilon) \times \operatorname{rot}(u^\epsilon + \psi^\epsilon) \cdot \varphi) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla(u^\epsilon + \psi^\epsilon) \cdot \nabla \varphi) dx - \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx = 0. \quad (1.2.16)$$

Обобщенное решение задачи (1.2.1), (1.2.2) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} (v \times \operatorname{rot} v \cdot \varphi) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \varphi) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx. \quad (1.2.17)$$

Обозначим $u^\epsilon - v = \omega$, из (1.2.16), отнимая (1.2.17) и полагая $\varphi = \omega$, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((u^\epsilon - v) \times \operatorname{rot} v \cdot \omega) dx + \int_{\Omega} (v \times \operatorname{rot}(u^\epsilon - v) \cdot \omega) dx + \\ & + \int_{\Omega} (\psi^\epsilon \times \operatorname{rot} u^\epsilon \cdot \omega) dx + \int_{\Omega} (u^\epsilon \times \operatorname{rot} \psi^\epsilon \cdot \omega) dx + \\ & + \int_{\Omega} (\psi^\epsilon \times \operatorname{rot} \psi^\epsilon \cdot \omega) dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla \psi^\epsilon \cdot \nabla \omega) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Здесь $\int_{\Omega} (v \times \operatorname{rot} v \cdot \omega) dx = 0$.

Остальные слагаемые соотношения (1.2.18) оцениваем так

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (v \times \operatorname{rot} \omega \cdot \omega) dx \right| \leq \|\operatorname{rot} \omega\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{L_4(\Omega)} \|v\|_{L_4(\Omega)} \leq \\ & \leq C \|v\|_{\dot{V}_1(\Omega)} \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{\dot{V}_1(\Omega)} \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (\psi^\epsilon \times \operatorname{rot} \psi^\epsilon \cdot \omega) dx \right| \leq \|\operatorname{rot} \psi^\epsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\psi^\epsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\omega\|_{L_4(\Omega)} \leq \\ & \leq C \|v^\epsilon\|_{W_3^{1,2}(\Omega)}^2 \|\omega\|_{W_3^1(\Omega)} \leq C \epsilon^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \mu \int_{\Omega} (\nabla \psi^\epsilon \cdot \nabla \omega) dx \right| \leq \mu \|\nabla \psi^\epsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq \delta \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_\delta \|\nabla \psi^\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \delta \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_\delta \epsilon^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки, собирая подобные слагаемые при малом δ , имеем

$$\left(\mu - C \|f\|_{\dot{V}_1(\Omega)}^2 - \delta \right) \|\omega\|_{W_3^1(\Omega)}^2 \leq C \epsilon^2.$$

Положим:

$$\mu - C \|f\|_{V_1(\Omega)}^2 - \delta \geq \delta_0 > 0.$$

Это может быть при малом $\|f\|_{V_1(\Omega)}^2$ или при большом $\mu > 0$.

Теорема 1.6 полностью доказана.

Далее рассмотрим нелинейную стационарную задачу в постановке поля скоростей и давления

$$(v \cdot \nabla)v + \nabla p = \mu \Delta v + f, \quad (1.2.20)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ v|_S &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Вспомогательная задача метода фиктивных областей сводится к решению уравнений в области D .

$$\begin{aligned} (v^e \cdot \nabla)v^e - \nabla p^e &= \operatorname{div}(\mu^e \nabla v^e) + f, \\ \operatorname{div} v^e &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

$$v^e \cdot \tau|_{S_1} = 0, p^e|_{S_1} = 0, \mu^e = \begin{cases} \mu, & \text{в } \Omega \\ \mu/\varepsilon, & \text{в } D_1, \end{cases} \quad (1.2.23)$$

$$[\mu^e \nabla v^e - p^e \cdot \delta \cdot n]|_S = 0, [v^e]|_S = 0, \quad (1.2.24)$$

f -продолжен в D_1 с сохранением нормы $L_2(\Omega)$. Отметим, что при получении априорных оценок решения вспомогательной задачи в постановке поля скоростей и полного напора при умножении нелинейных слагаемых на v^e после интегрирования они обращаются в ноль. Здесь это не получается, т. е.

$$\int_D (v^e \cdot \nabla)v^e \cdot v^e dx \neq 0.$$

Априорные оценки решения задачи (1.2.22)-(1.2.24). Умножим (1.2.22) на v^e скалярно в $L_2(D)$, получим:

$$\begin{aligned} \mu \int_D |\nabla v^e|^2 dx + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{D_1} |\nabla v^e|^2 dx + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{S_1} k(x) |v^e|^2 ds = \\ = \int_{S_1} |v^e|^2 (v^e \cdot n) ds + \int_D (f \cdot v^e) dx. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Оцениваем слагаемые (1.2.25) по теореме вложения.

$$\left| \int_{S_1} |v^e|^2 (v^e \cdot n) ds \right| = \int_{S_1} |v^e|^3 ds.$$

Для оценки правой части будем использовать неравенство (135)

$$\|u\|_{q,S_1} \leq C \|\nabla u\|_{2,G}^\alpha \|u\|_{2,G}^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad q = \frac{2(n-1)}{n-2\alpha}.$$

В нашем случае $q = 3, n = 3, \alpha = 5/6, G = D_1$

$$\|u\|_{3,S_1}^3 \leq C \|\nabla u\|_{L_2(D_1)}^{5/2} \cdot \|u\|_{L_2(D_1)}^{1/2}. \quad (1.2.26)$$

Используя неравенство (1.2.26), из (1.2.25) получим:

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} |\nabla v^\epsilon|^2 dx + \frac{\mu}{\epsilon} \left(\int_{D_1} |\nabla v^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 ds \right) \leq \\ & \leq \|f\|_{V_1(D)} \|v^\epsilon\|_{V_1(D)} + C \|\nabla v^\epsilon\|_{L_2(D_1)}^{5/2} \cdot \|v^\epsilon\|_{L_2(D_1)}^{1/2} \leq \\ & \leq \delta \|v^\epsilon\|_{V_1(D)}^2 + C_\delta \|f\|_{V_1(D)}^2 + \\ & + C_2 \|v^\epsilon\|_{L_2(D_1)}^{1/2} \left(\int_{D_1} |\nabla v^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 ds \right)^{5/4}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает:

$$\begin{aligned} & \mu \|\nabla v^\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2\epsilon} \|v^\epsilon\|_{1,D_1}^2 + \\ & + \left(\frac{\mu}{2\epsilon} - C_2 \|v^\epsilon\|_{L_2(D_1)}^{1/2} \cdot \|v^\epsilon\|_{1,D_1}^{1/2} \right) \|v^\epsilon\|_{1,D_1}^2 \leq C_\delta \|f\|_{V_1(D)}^2, \end{aligned}$$

где

$$\|v^\epsilon\|_{1,D_1} = \left(\int_{D_1} |\nabla v^\epsilon|^2 dx + \int_{S_1} k(x) |v^\epsilon|^2 ds \right)^{1/2},$$

ϵ -возьмем таким достаточно малым, чтобы выполнялось

$$\mu/2\epsilon \geq C_2 \|v^\epsilon\|_{L_2(D_1)}^{1/2} \|v^\epsilon\|_{1,D_1}^{1/2}.$$

Отсюда имеем:

$$\mu \|\nabla v^\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2\epsilon} \|v^\epsilon\|_{1,D_1}^2 \leq C \|f\|_{V_1(D)}^2. \quad (1.2.27)$$

В силу теоремы вложения

$$\|\nabla v^\epsilon\|_{L_1(D_1)} \leq C_0 \|v^\epsilon\|_{1,D_1}.$$

Оценка (1.2.27) может быть справедливой, если ϵ взять достаточно малым, чтобы выполнялось условие

$$\mu/2\epsilon \geq \frac{C \cdot \epsilon}{\mu} \|f\|_{L_2(D)}. \quad (1.2.28)$$

$$\|f\|_{L_1(D)} \leq \frac{1}{2c} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2$$

Теорема 1.7. Пусть $f \in V_1(D)$ и выполняется условие (1.2.28). Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (1.2.22)-(1.2.24), и для решения имеет место оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{V_1(D)} + \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{1,D_1} \leq C \|f\|_{V_1(D)}, \quad (1.2.29)$$

кроме того

$$\|v^\varepsilon - v\|_{W_2^1(D)} + \|p^\varepsilon - p\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon,$$

при достаточно большом $\mu > 0$.

Существование решения доказывается методом Галеркина. Используется теорема о неподвижных точках Брауэра [144] при малом $\varepsilon > 0$. Оценка (1.2.29) получается точно так же, как оценка (1.2.13). После этого получим, так же как в теореме 1.6 оценку

$$\|v^\varepsilon - v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\varepsilon,$$

при малом $\|f\|_{V_1(D)}$. Если $(p^\varepsilon, v^\varepsilon)$ — решение задачи (1.2.22)-(1.2.24), то $(v^\varepsilon, p^\varepsilon + C_0)$ — (C_0 произвольная постоянная) также является решением задачи (1.2.22)-(1.2.24), и C_0 — возьмем так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\Omega} p^\varepsilon dx = 0.$$

Пусть $\psi^\varepsilon|_S = v^\varepsilon|_S$, ψ^ε продолжаем в Ω , сохраняя норму

$$\|\psi^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(S)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((u^\varepsilon + \psi^\varepsilon) \cdot \nabla)(u^\varepsilon + \psi^\varepsilon, \varphi) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla(u^\varepsilon + \psi^\varepsilon) \cdot \nabla \psi^\varepsilon) dx = \\ = \int_{\Omega} (f \cdot \varphi) dx + \int_{\Omega} p^\varepsilon \cdot \operatorname{div} \varphi dx, \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)v, \varphi) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \varphi) dx = \\ = \int_{\Omega} (f \cdot \varphi) dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

для любого $\varphi \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Оцениваем $p^\varepsilon - p$ в негативной норме

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\varphi\|_{\dot{W}_2^1} = 1} \left| \int_{\Omega} (p^\varepsilon - p) \operatorname{div} \varphi \, dx \right| \leq \\ & \leq \sup_{\|\varphi\|_{\dot{W}_2^1} = 1} \left| \int_{\Omega} [((u^\varepsilon + \psi^\varepsilon) \cdot \nabla)(u^\varepsilon + \psi^\varepsilon) \cdot \varphi - ((v \cdot \nabla)v \cdot \varphi)] \, dx + \right. \\ & \left. + \sup_{\|\varphi\|_{\dot{W}_2^1} = 1} \left| \int_{\Omega} ((\nabla(u^\varepsilon + \psi^\varepsilon) - \nabla v) \cdot \nabla \varphi) \, dx \right| \right. \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Оцениваем интегралы (1.2.32) по неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} ((u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon - (v \cdot \nabla)v) \cdot \varphi \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} [(((u^\varepsilon - v) \cdot \nabla)u^\varepsilon + (v \cdot \nabla)(u^\varepsilon - v)) \cdot \varphi] \, dx \right| \leq \\ &\leq (\|u^\varepsilon - v\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla(u^\varepsilon - v)\|_{L_2(\Omega)}) \cdot \\ &\quad \cdot \|\varphi\|_{L_4(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\varphi\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\Omega} ((\nabla(u^\varepsilon + \psi^\varepsilon) - \nabla v) \cdot \nabla \varphi) \, dx \right| \leq (\|\nabla(u^\varepsilon - v)\| + \|\nabla \psi^\varepsilon\|) \|\varphi\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)},$$

$$\left| \int_{\Omega} ((u^\varepsilon \cdot \nabla)\psi^\varepsilon \cdot \varphi) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} ((\psi^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon \cdot \varphi) \, dx \right| \leq C\varepsilon \|\varphi\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}.$$

Следовательно, мы приходим к неравенству

$$\sup_{\|\varphi\|_{\dot{W}_2^1} = 1} \left| \int_{\Omega} (p^\varepsilon - p) \operatorname{div} \varphi \, dx \right| < \varepsilon C,$$

Отсюда следует

$$\|p^\varepsilon - p\|_{L_1(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Теорема 1.7 доказана.

Существование сильного решения доказано в следующей теореме.

Теорема 1.8. Пусть $S, S_1 \in C^3$, $f \in L_2(D)$, $k(x)$ — неотрицательная функция. Тогда существует хотя бы одно сильное решение задачи (1.2.22)-(1.2.24), и для решения имеет место оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{V_1(D)} + \|v^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{W_2^2(D_1)} +$$

$$+\|p^\varepsilon\|_{L_2(D)} + \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(D_1)} \leq C\|f\|_{L_2(D)},$$

кроме того

$$\|v^\varepsilon - v\|_{W_2^1(\Omega)} + \|p^\varepsilon - p\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\varepsilon,$$

при достаточно малом $\|f\|_{L_2(D)}$.

Доказательство. Приближенное решение задач (1.2.22) - (2.2.24) будем искать в виде конечной суммы

$$v_N^\varepsilon = \sum_{i=1}^N \alpha_i \omega_i,$$

где ω_i -собственные функции оператора (1.1.22), (1.1.23). α_i -находятся из системы алгебраических уравнений

$$\left((v_N^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon, \omega_j \right)_D + (\mu^\varepsilon \nabla v^\varepsilon, \nabla \omega_j)_D = (f, \omega_j)_D, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.2.33)$$

и для решения v_N^ε имеет место оценка

$$\|v_N^\varepsilon\|_{V_1(D)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla v_N^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)} \leq C\|f\|_{V_2(D)}.$$

Умножим (1.2.33) на $\alpha_j \lambda_j$, суммируем по $j = 1, \dots, N$ и, используя оценки (1.1.24), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)} + \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \\ & \| (v_N^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon \|_{L_2(\Omega)} + \| (v^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon \|_{L_2(D_1)} + \|f\|_{L_2(D)}, \\ & \| (v_N^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon \|_{L_2(\Omega)} \leq \|\nabla v_N^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|v_N^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \leq \\ & \leq C \|v_N^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^{3/4} \cdot \|\nabla v_N^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^{1/4} \cdot \|\nabla v_N^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq \delta \|v_N^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + C_\delta \|f\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\| (v_N^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon \|_{L_2(D_1)} \leq \delta \|v_N^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)}^2 + C_\delta \|f\|_{L_2(D_1)}^2.$$

Итак, получена следующая оценка

$$\frac{1}{\varepsilon} \|v_N^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)} + \|v_N^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(D)}. \quad (1.2.34)$$

После перехода к пределу $N \rightarrow \infty$ предельная функция $v^e \in W_2^2(\Omega)$, $v^e \in W_2^2(D_1)$ удовлетворяет уравнению (1.2.22)-(1.2.24) почти всюду в D_1, Ω на S в соответствующей мере.

Теперь покажем оценку скорости сходимости. Обозначим $v^e - v = W$, для W получим задачу

$$(W \cdot \nabla)v^e + (v \cdot \nabla)W = \mu \Delta W - \nabla(p^e - p),$$

$$\operatorname{div} W = 0,$$

$$W|_S = v^e|_S \in W_2^{3/2}(S), \|v^e\|_{W_2^{3/2}(S)} \leq \varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Используя теорему об устойчивости линейной задачи по граничным условиям и по правой части, получим

$$\|W\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\nabla(p^e - p)\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\|(W \cdot \nabla)v^e\|_{L_2(\Omega)} + \|(v \cdot \nabla)W\|_{L_2(\Omega)}) + C\|v^e\|_{W_2^{3/2}(S)}. \quad (1.2.35)$$

Оценим правую часть (1.2.35) по теореме вложения

$$\|(W \cdot \nabla)v^e\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\nabla v^e\|_{L_4(\Omega)} \|W\|_{L_4(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)} \|W\|_{W_2^2(\Omega)},$$

$$\|(v \cdot \nabla)W\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla W\|_{L_4(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)} \|W\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

Отсюда и из (1.2.35) имеем:

$$(1 - C\|f\|_{L_2(\Omega)}) \|W\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\|v^e\|_{W_2^{3/2}(S)} \leq C\varepsilon.$$

Предположим $1 - C\|f\|_{L_2(\Omega)} \geq \delta_0 > 0$ и имеем:

$$\|W\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Теорема 1.8 доказана.

1.3 Математическое моделирование краевых условий для давления и полного напора в нестационарных уравнениях Навье - Стокса методом фиктивных областей.

Постановка задачи. В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ рассмотрим начально-краевую задачу для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений Навье - Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \mu \Delta v - \nabla p + f, \quad (1.3.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (1.3.2)$$

$$v|_{t=0} = 0, v|_S = 0. \quad (1.3.3)$$

Для простоты будем предполагать $v_0(x) = 0$. Вспомогательная задача, соответствующая методу фиктивных областей, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в $D = D_1 \cup \Omega$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + (v^\epsilon \cdot \nabla)v^\epsilon &= \operatorname{div}(\mu^\epsilon \nabla v^\epsilon) - \nabla p^\epsilon + f, \\ \operatorname{div} v^\epsilon &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$v^\epsilon|_{t=0} = 0, v^\epsilon \cdot \tau|_{S_1} = 0, p^\epsilon|_{S_1} = 0, \quad (1.3.5)$$

$$[(\mu^\epsilon \cdot \nabla v^\epsilon - p^\epsilon \delta)n]|_S = 0, [v^\epsilon]|_S = 0, \quad (1.3.6)$$

n, τ - нормальный и касательный вектор к границе S_1 .

Определение 1.3 Обобщенным решением задачи (1.3.4)-(2.3.6) называется функция

$$v^\epsilon \in L_2(0, T; V_1(D)) \cap L_\infty(0, T; L_2(D)),$$

удовлетворяющая интегральному тождеству.

$$\begin{aligned} - \int_0^T (v^\epsilon, \Phi_t)_D dt - \int_0^T ((v^\epsilon \cdot \nabla)\Phi, v^\epsilon)_D dt + \int_0^T \int_{S_1} (v^\epsilon \cdot \Phi)v^\epsilon \cdot n ds dt + \\ + \frac{\mu}{\epsilon} \int_0^T \int_{S_1} k(x)(v \cdot \Phi) ds dt + \int_0^T (\mu^\epsilon \nabla v^\epsilon \cdot \nabla \Phi)_D dt = \int_0^T (f \cdot \Phi)_D dt, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

для любого

$$\Phi \in C^1(0, T; V_1(D)), \Phi(T) = 0, (u, v)_D = \int_D u \cdot v dx.$$

Будем предполагать, что $k(x)$ - неотрицательная функция. Пусть w_1, w_2, w_m, \dots произвольный базис в $V_1(D)$, v_N^ϵ -приближенное решение задач (1.3.4)-(2.3.6)

$$v_N^\epsilon(t) = \sum_{m=1}^N \alpha_{Nm}(t) \omega_m, \quad (1.3.8)$$

$\alpha_{Nm}(t)$ -находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_N^\epsilon(t), \omega_j)_D + ((v_N^\epsilon \cdot \nabla)v_N^\epsilon, \omega_j)_D + \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_1} k(x)(v_N^\epsilon, \omega_j)_D ds + \\ + (\mu^\epsilon \nabla v_N^\epsilon, \omega_j)_D = (f, \omega_j)_D, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

$$v_N^\epsilon(t)|_{t=0} = 0, \alpha_{Nm}(t)|_{t=0} = 0, m = 1, \dots, N. \quad (1.3.10)$$

Разрешимость (1.3.9)-(1.3.10) в малом по времени известна из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений [149]. Глобальная разрешимость следует из априорных оценок решения.

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_N^\epsilon(t)\|_{V(D)} \leq C < \infty, \quad (1.3.11)$$

которая получается из системы (1.3.9). Умножая (1.3.9) на $\alpha_{Nm}(t)$, суммируя по $m = 1, \dots, N$, в результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_N^\epsilon(t)\|_{V(D)}^2 + ((v_N^\epsilon \cdot \nabla)v_N^\epsilon, v_N^\epsilon)_D + \mu \|v_{Nz}^\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ + \frac{\epsilon}{\epsilon} \|v_{Nz}^\epsilon\|_{L_2(D_1)}^2 + \frac{\epsilon}{\epsilon} \int_{S_1} k(x)(v_N^\epsilon(x))^2 ds \leq \|f\|_{V_1(D)} \cdot \|v^\epsilon\|_{V_1(D)} \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_D ((v_N^\epsilon(t) \cdot \nabla)v_N^\epsilon(t), v_N^\epsilon(t)) dx \right| = \left| \int_{S_1} (v_N^\epsilon(t))^2 v_N^\epsilon(t) dS \right| \leq \\ \leq \int_{S_1} |v_N^\epsilon(t)|^3 ds \leq C_0 \|\nabla v_N^\epsilon(t)\|_{L_2(D_1)}^2 \|v_N^\epsilon(t)\|_{L_2(D_1)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_N^\epsilon(t)\|_{L_2(D)}^2 + \mu \|v_{Nz}^\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon} - \|v_N^\epsilon(t)\|_{L_2(D_1)} \cdot C_0 \right) \cdot \|\nabla v_N^\epsilon(t)\|_{L_2(D_1)}^2 \leq \|f(t)\|_{V_1(D)} \|v^\epsilon(t)\|_{V_1(D)}. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Пусть

$$\mu/2\epsilon - \|v_N^\epsilon(t)\|_{L_2(D_1)} \cdot C_0 \geq 0.$$

Тогда получим

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_N^\epsilon(t)\|_D \leq \int_0^T \|f(t)\|_{V_1(D)} dt,$$

Если ϵ возьмем так, чтобы

$$\mu/2\epsilon - C_0 \int_0^T \|f(t)\|_{V_1(D)} dt \geq 0, \quad (1.3.14)$$

то из (1.3.13) выводим оценку:

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(D)} + \int_0^T \|\nabla v_N^\varepsilon(t)\|_{\Omega}^2 dt + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|\nabla v_N^\varepsilon(t)\|_{D_1}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{S_1} k(x) |v_N^\varepsilon(t)|^2 ds dt \leq \quad (1.3.15) \\ & \leq C \int_0^T \|f(t)\|_{V_1(D)}^2 dt \leq C < \infty, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ε .

Пусть $D_t^{1/4-\kappa} v_N^\varepsilon(t)$ -сужение на $(0, T)$ обратного преобразования Фурье по τ от $\tau^{1/4-\kappa} \hat{v}_N^\varepsilon$, \hat{v}_N^ε - преобразование Фурье по t функции \tilde{v}_N^ε , которая получается продолжением v_N^ε нулем вне $(0, T)$.

Лемма 1.2 Имеет место оценка

$$\|D_t^{1/4-\kappa} v_N^\varepsilon\|_{L_2(0, T, V(D))} \leq C < \infty,$$

для любого $\kappa > 0$, C -не зависит от ε .

• По определению обобщенной производной [150], из (1.3.9) для $\tilde{v}_N^\varepsilon(t)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\tilde{v}_N^\varepsilon(t), \omega_j)_D + ((\tilde{v}_N^\varepsilon(t) \cdot \nabla) \tilde{v}_N^\varepsilon(t), \omega_j)_D + (\mu^\varepsilon \nabla \tilde{v}_N^\varepsilon(t) \nabla \omega_j)_D + \\ & + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{S_1} k(x) (\tilde{v}_N^\varepsilon(t), \omega_j) ds = (\tilde{f}, \omega_j) - (\tilde{v}_N(T), \omega_j) \delta_T \end{aligned}$$

где δ_T -мера Дирака, сосредоточенная в $t = T$.

Заметим что:

$$\begin{aligned} & ((\tilde{v}_N^\varepsilon(t) \cdot \nabla) \tilde{v}_N^\varepsilon(t), \omega_j)_D \leq \|\nabla \tilde{v}_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(D)} \|\tilde{v}_N^\varepsilon\|_{L_4(D)} \cdot \|\omega_j\|_{L_4(D)} \leq \\ & \leq C \|\tilde{v}_N^\varepsilon(t)\|_{V_1(D)} \|\omega_j\|_{V_1(D)}. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Следовательно,

$$((\tilde{v}_N^\varepsilon(t) \cdot \nabla) \tilde{v}_N^\varepsilon(t), \omega_j)_D = (u_N(\tilde{v}_N^\varepsilon), \omega_j)_D. \quad (1.3.17)$$

Положим $u_N(\tilde{v}_N^\varepsilon) = u_N(t)$, $\hat{u}_N(t)$ - преобразование Фурье от $u_N(t)$, $\hat{v}_N^\varepsilon(t)$ -преобразование Фурье от $\tilde{v}_N^\varepsilon(t)$. Тогда в силу (1.3.16) имеем.

$$\begin{aligned} & 2\pi i \tau (\hat{v}_N^\varepsilon(\tau), \omega_j)_D + (\hat{u}_N(\tau), \omega_j)_D + (\mu^\varepsilon \hat{v}_N^\varepsilon(\tau), \omega_j)_D + \\ & + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{S_1} k(x) (\hat{v}_N^\varepsilon, \omega_j) ds = (\hat{f}, \omega_j)_D - (v_N^\varepsilon(T), \omega_j) e^{-2\pi i \tau T}. \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Однако $\hat{v}_N^\varepsilon(t) \in [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]$, поэтому из (1.3.18) следует.

$$\begin{aligned} & 2\pi i \tau \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{L_2(D)}^2 + (\mu^\varepsilon \nabla \hat{v}_N^\varepsilon(\tau), \nabla \hat{v}_N^\varepsilon(\tau))_D = \\ & = (\hat{f}(\tau), \hat{v}_N^\varepsilon(\tau))_D - \frac{\mu}{\varepsilon} \int_S k(x) \hat{v}_N^\varepsilon(\tau) \hat{v}_N^\varepsilon(\tau) dS = \\ & = (v_N^\varepsilon(\tau), \hat{v}_N^\varepsilon(\tau))_D e^{-2\pi i} - (\hat{u}_N(\tau), \hat{v}_N^\varepsilon(\tau))_D. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Взяв мнимую часть (1.3.19) и оценив правую часть сверху, мы получаем

$$\begin{aligned} |\tau| \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{L_2(D)}^2 & \leq \|\hat{u}_N(\tau)\|_{V_1(D)} \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)} + \\ & + \|\hat{f}(\tau)\|_{V_1(D)} \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)} + \|v_N^\varepsilon(T)\|_{L_1(D)} \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{L_1(D)}. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

В силу свойств (1.3.16), (1.3.17), используя оценку из [144] имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{v}_N^\varepsilon(t)\|_{V_1(D)} dt & \leq C \int_0^T \|v_N^\varepsilon(t)\|_{V_1(D)} dt \leq C < \infty, \\ \|\hat{u}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)} & \leq C. \end{aligned}$$

Кроме того, из (1.3.15) следует $\|v_N^\varepsilon(T)\| \leq C < \infty$. С учетом этих оценок, (1.3.20) перепишем в виде

$$\begin{aligned} |\tau| \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}^2 & \leq C \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)} + \\ & + \|\hat{f}(\tau)\|_{V_1(D)} \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)} + C_1 \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}. \end{aligned}$$

Пусть σ — произвольная постоянная и $2\sigma > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau| \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}^2}{1+|\tau|^\sigma} d\tau & \leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}}{1+|\tau|^\sigma} d\tau + \\ & + C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{f}(\tau)\|_{V_1(D)} \|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}}{(1+|\tau|^\sigma)} d\tau + \\ & + C_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}}{1+|\tau|^\sigma} d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Заметим, что $\frac{1}{1+|\tau|^\sigma} \in L_2(\mathbb{R}_\tau)$ и в силу (1.3.15)

$$\hat{v}_N^\varepsilon(\tau) \in L_2(\mathbb{R}_\tau, V_1(D)).$$

Следовательно, используя неравенство Гельдера, легко можно показать что,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{v}_N^\varepsilon(\tau)\|_{V_1(D)}}{1+|\tau|^\sigma} d\tau \leq C < \infty.$$

Используя неравенство Коши, можно показать ограниченность второго интеграла в правой части (1.3.21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\bar{f}\|_{V_1^*(D)} \|\bar{v}_N^{\varepsilon}\|_{V_1(D)} / (1 + |\tau|^{\sigma}) d\tau \leq C < \infty.$$

Ограниченность последнего интеграла в (1.3.21) следует из неравенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\bar{v}_N^{\varepsilon}(\tau)\|_{V_1^*(D)}}{1 + |\tau|^{\sigma}} d\tau \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\bar{v}_N^{\varepsilon}(\tau)\|_{V_1(D)}}{1 + |\tau|^{\sigma}} d\tau \leq C < \infty.$$

Следовательно, используя лемму компактности [144], имеем соотношения:

$$v_N^{\varepsilon}(t) \rightarrow v^{\varepsilon}(t) \quad * \text{ слабо в } L_{\infty}(0, T; V(D)),$$

$$v_N^{\varepsilon}(t) \rightarrow v^{\varepsilon}(t) \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V_1(D)),$$

$$v_N^{\varepsilon}(t) \rightarrow v^{\varepsilon}(t) \quad \text{сильно в } L_2(0, T; V(D)).$$

при $N \rightarrow \infty$.

Теперь после перехода к пределу в (1.3.9) и интегрирования по частям убедимся, что $v^{\varepsilon}(t)$ - обобщенное решение задачи (1.3.4)-(1.3.6).

Имеет место следующая

Теорема 1.9. Пусть $f(t) \in L_2(0, T; V_1^*(D))$, ε -удовлетворяет условию (1.3.14). Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (1.3.4)-(1.3.6) и для решения имеет место оценка (1.3.15), кроме того при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи (1.3.4)-(1.3.6) сходится к решению задачи (1.3.1)-(1.3.3).

Доказательство. Теорема существования уже доказана. Нам остается доказать сходимость решения. Заметим, что полученные априорные оценки (1.3.15) и оценка леммы 1.1 равномерны по ε . Поэтому из последовательности $\{v^{\varepsilon}\}$ можно выделить подпоследовательности $\{v^{\varepsilon_i}\}$, для которых при $\varepsilon_i \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$v^{\varepsilon_i} \rightarrow v \quad * \text{ слабо в } L_{\infty}(0, T; V(D)),$$

$$v^{\varepsilon_i} \rightarrow v \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V_1(D)),$$

$$v^{\varepsilon_i} \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_2(0, T; V(D)),$$

Теперь в интегральном тождестве (1.3.7) положим $\Phi = 0$ в D_1 и, переходя к пределу, получим

$$-\int_0^T (v, \Phi_t)_{\Omega} dt - \int_0^T [(v \cdot \nabla) \Phi, v]_{\Omega} - \mu (\nabla v, \nabla \Phi)_{\Omega} dx = \int_0^T (f, \Phi)_{\Omega} dt,$$

для любого

$$\Phi \in C^1(0, T; V_1^0(\Omega)).$$

Остается показать, что $v|_S = 0$. Покажем, что $\|v^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(S))} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого воспользуемся неравенством

$$\|v^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(S))} \leq C (\|v_x^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D_1))} + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D_1))}) \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Итак, теорема 1.9 полностью доказана.

Определение 1.4 Сильно обобщенным решением задачи (1.3.4)-(1.3.6) называются функции $v^\varepsilon, v_i^\varepsilon, v_{ix}^\varepsilon \in L_2(0, T; L_2(D))$, $v^\varepsilon \in L_2(0, T; V_1(D))$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$(v_i^\varepsilon, \varphi)_D + (\mu^\varepsilon \nabla v^\varepsilon, \nabla \varphi)_D + ((v^\varepsilon \nabla) \varphi, v^\varepsilon)_D + \int_{S_1} (v^\varepsilon \cdot \varphi)(v^\varepsilon \cdot n) ds + \frac{\mu}{\varepsilon} (k(x) v^\varepsilon, \varphi)_{S_1} = (f, \varphi), \quad (1.3.22)$$

для любого $\varphi \in V_1(D)$. По определению $v^\varepsilon \in L_2(0, T; V(\Omega))$, поэтому начальное данное удовлетворяет в этом смысле

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^\varepsilon - v_0\|_{V(\Omega)} = 0.$$

Теорема 1.10. Пусть выполнены условия теоремы 1.9 и $f(t) \in L_2(0, T; V_1^0(D))$. Тогда существует единственное сильно обобщенное решение задач (1.3.4)-(1.3.6), для решения имеют место оценки

$$\|v_{ix}^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D))} + \frac{1}{\varepsilon} \|v_{ix}^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D_1))} \leq C \|f\|_{L_2(0, T; V_1^0(D))}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \left(\|v_x^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D_1))} + \left(\int_{S_1} k(x) |v^\varepsilon|^2 ds \right)^{1/2} \right) \leq C < \infty. \quad (1.3.23)$$

Доказательство. Дифференцируем (1.3.9) по t и умножим на $\alpha_{Nj}(t)$, суммируем по $j = 1, \dots, N$, интегрируем по частям и имеем

$$\frac{d}{dt} \|v_{Nt}^\varepsilon\|_D^2 + ((v_{Nt}^\varepsilon \cdot \nabla) v_{Nt}^\varepsilon(t), v_{Nt}^\varepsilon)_D + \int_{S_1} (v_{Nt}^\varepsilon)^2 (v_{Nt}^\varepsilon \cdot n) ds + \mu \|v_{Ntx}^\varepsilon\|_\Omega^2 + \frac{\mu}{\varepsilon} \|v_{Ntx}^\varepsilon\|_{D_1}^2 + \quad (1.3.24)$$

$$+ \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{S_1} k(x) (v_{Nt}^\varepsilon)^2 ds = \int_D (f_t \cdot v_{Nt}^\varepsilon) dx.$$

Оцениваем интегралы (1.3.24) по неравенствам теорем вложения

$$\begin{aligned} |(v_{Nt}^e \nabla) v_{Nt}^e, v_{Nt}^e|_D &\leq \|\nabla v_{Nt}^e\|_{L_2(D)} \|v_{Nt}^e\|_{L_4(D)}^2 \leq \\ &\leq C \|\nabla v_{Nt}^e\|_{L_2(D)} \|v_{Nt}^e\| \|v_{Ntx}^e\| \leq \delta \|v_{Ntx}^e\|^2 + C_\delta \|\nabla v_{Nt}^e(t)\|_{L_2(D)} \|v_{Nt}^e\|^2, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{S_1} (v_{Nt}^e)^2 v_{Nt}^e n ds \right| \leq \|v_{Nt}^e\|_{L_2(S_1)} \|v_{Nt}^e\|_{L_4(S_1)}^2 \leq$$

$$\leq C \|\nabla v_{Nt}^e\|_{D_1}^{3/2} \|v_{Nt}^e\|_{D_1}^{1/2} \|v_{Nt}^e\|_{D_1}^{1/2} \|v_{Ntx}^e\|_{D_1}^{1/2} \leq \delta \|\nabla v_{Nt}^e\|^2 + C_\delta \|v_{Nt}^e\|^2 \|v_{Ntx}^e\|^2$$

Отсюда при малом δ имеем оценку

$$\begin{aligned} &\|v_{Nt}^e\|_{L_\infty(0,T;V(D))} + \|v_{Nt}^e\|_{L_2(0,T;V_1(D))} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \|v_{Ntx}^e\|_{L_2(0,T;L_2(D_1))} \leq C \|f_t\|_{L_2(0,T;V_1^*(D))}. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

В силу оценки (1.3.25) легко доказываются единственность сильно обобщенного решения задачи (1.3.4)-(1.3.6) и для решение $v^e(t)$ имеет место оценка (1.3.25). Нам остается доказать вторую оценку (1.3.23). Пусть $\psi^e(t) = v^e(t)$, $x \in D_1$. Продолжим $\psi^e(t)$ в Ω с сохранением нормы

$$\|\psi^e(t)\|_{V_1(D)} \leq \|v^e(t)\|_{W_2^1(D_1)}.$$

Это всегда можно сделать, потому что $v_{tx}^e \in L_2(0,T;L_2(D_1))$. Каждый интеграл непрерывен по t . Тогда в (1.3.22) положим $\Phi(t) = \psi^e(t)$ и будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|v^e(t)\|^2 + \int_{S_1} k(x) (v^e(t))^2 ds) &= -(v_t^e(t), \psi^e(t))_D + \\ &+ (v^e(t) \cdot \nabla) v^e(t), \psi^e(t))_D + \mu (v_x^e, \psi_x^e)_\Omega + (f, \psi^e)_D. \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Оцениваем интегралы, входящие в (1.3.26), по неравенствам Гельдера и неравенствам вложения

$$\begin{aligned} |(v^e(t), \psi^e(t))_D| &\leq \|v^e(t)\|_{L_2(D)} \|\psi^e(t)\|_{L_2(D)} \leq \\ &\leq C \|v^e(t)\|_{L_2(D)} (\|v_x^e(t)\|_{D_1}^2 + \int_{S_1} k(x) (v^e(t))^2 ds) \leq C \|v^e(t)\| \|v^e(t)\|_{1,D_1} \\ \mu |(v_x^e(t), \psi_x^e(t))_\Omega| &\leq \|v_x^e(t)\|_\Omega \|\psi_x^e(t)\|_\Omega \leq C \|v_x^e(t)\|_\Omega \|v^e(t)\|_{1,D_1} \end{aligned}$$

$$|(v^e(t) \nabla) v^e(t), \psi^e(t)|_D \leq \|\nabla v^e(t)\|_{L_2(D)} \|\psi^e(t)\|_{L_4(D)} \|v^e(t)\|_{L_4(D)} \leq$$

$$\leq \|\nabla v^\varepsilon(t)\|^2 \|v^\varepsilon(t)\|_{1,D_1},$$

$$|(f(t), \psi^\varepsilon(t))| \leq \|f(t)\|_{V_1(D)} \|\psi^\varepsilon(t)\|_{V_1(D)} \leq \|f(t)\|_{V_1(D)} \|v^\varepsilon(t)\|_{1,D_1}.$$

Отсюда выводим

$$\frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon(t)\|_{1,D_1}^2 \leq C \|v^\varepsilon(t)\|_{1,D_1},$$

то есть

$$\frac{1}{\varepsilon} (\|\nabla v^\varepsilon(t)\| + \int_{S_1} k(x)(v^\varepsilon(t))^2 ds)^{1/2} \leq C < \infty.$$

Итак, теорема 1.10 полностью доказана.

Определение 1.5 Сильным решением задачи (1.3.4)-(1.3.6) называется функция $v^\varepsilon \in L_2(0, T; V_1(D)) \cap L_2(0, T; W_2^1(D_1)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $v_1^\varepsilon \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющая уравнению (1.3.4) и условиям (1.3.5), (1.3.6) почти всюду в соответствующей мере.

Теорема 1.11. Пусть $f(t) \in L_2(0, T; L_2(D))$, $S, S_1 \in C^3$, $D \subset R^2$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (1.3.4)-(1.3.6), и для решения имеет место оценка

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T;V(D))} + \|v^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T;W_2^2(D_1))} \leq C \|f(t)\|_{L_2(0,T;L_2(D))}.$$

Доказательство. Сильное решение будем искать методом Галеркина, в виде (1.3.8), при этом базисные функции $\{w_m\}$ являются собственными функциями оператора (1.1.22), (1.1.23). Рассуждая так же, как выше, можно показать, что для приближенного решения v_N^ε имеет место оценка (1.3.15) при малом ε . Умножим (1.3.9) на $\lambda_j \alpha_{Nj}(t)$ и, суммируя по $j = 1, \dots, N$, имеем оценку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_N^\varepsilon\|_{L_2(D)}^2 + \|v_N^\varepsilon(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{W_2^2(D_1)}^2 \leq C \|f(t)\|_{L_2(D)}^2.$$

Откуда и следует оценка

$$\|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T;V(D))} + \frac{1}{\varepsilon} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T;W_2^2(D_1))} \leq C \|f(t)\|_{L_2(0,T;L_2(D))}. \quad (1.3.27)$$

В силу оценки (1.3.27) легко доказывается теорема 1.11.

В случае области $D \subset R^3$ теоремы 1.10, 1.11 справедливы при большом μ . Здесь априорные оценки получаются по другому. Кратко остановимся на доказательстве теоремы 1.10. В силу (1.3.9) и (1.3.12), используя неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_1} (v_N^\varepsilon)^2 (v_N^\varepsilon n) ds \right| &\leq \int_{S_1} |(v_N^\varepsilon(t))|^3 ds \leq \\ &\leq C_1 \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{L_2(D_1)}^{5/2} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(D_1)}^{1/2}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{V(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} \|v_{Nz}^\varepsilon\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu}{2\varepsilon} \|v_{Nz}^\varepsilon\|_{D_1}^2 + \\ + \left(\frac{\mu}{2\varepsilon} - C_1 \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{D_1} \right) \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^2 \leq C \|f\|_{L_2(D)}^2. \end{aligned}$$

Предположим, что

$$\frac{\mu}{2\varepsilon} - C_1 \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} \|v_N^\varepsilon(t)\|_{D_1} \geq \delta_1 > 0. \quad (1.3.28)$$

В результате имеем

$$\|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_\infty(0,T;V(D))}^2 + \int_0^T \|v_{Nz}^\varepsilon\|_D^2 dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|v_{Nz}^\varepsilon\|_{D_1}^2 dt \leq C < \infty. \quad (1.3.29)$$

Дифференцируем (1.3.9) по t , умножим на $\alpha_{Nj}^\varepsilon(t)$, суммируем по $j = 1, \dots, N$ и, используя оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_1} (v_{Nt}^\varepsilon)^2 (v_N^\varepsilon n) ds \right| &\leq \int_{S_1} |v_{Nt}^\varepsilon(t)|^2 |v_N^\varepsilon(t)| ds \leq \\ &\leq \|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(S_1)}^2 \|v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(S_1)} \leq \\ &\leq \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{4/3} \|v_{Nt}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{2/3} \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{1/3} \|v_{Nt}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{2/3} \leq \\ &\leq C \|v_{Nzt}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{4/3} \|v_{Nt}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{2/3} \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|^{1/3} \leq C_2 \|v_{Nzt}^\varepsilon\|_{D_1}^2 \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{1/2}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{Nt}^\varepsilon\|_D^2 + \left(\frac{\mu}{2} - \|\nabla v_N^\varepsilon(t)\|_D C_3 \right) \|v_{Nt}^\varepsilon\|_D^2 + \\ + \left(\frac{\mu}{2\varepsilon} - C_2 \|v_{Nz}^\varepsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} \right) \|v_{Nzt}^\varepsilon\|^2 + \\ + \frac{\mu}{3} \|v_{Ntz}^\varepsilon\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu}{3\varepsilon} \|v_{Ntz}^\varepsilon\|_{D_1}^2 \leq C \|f_t\|_{V_2(D)}^2. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

При этом использовали неравенство

$$\left| \int_D (v_{Nt}^\epsilon \nabla) v_N^\epsilon, v_{Nt}^\epsilon dx \right| \leq \|\nabla v_N^\epsilon(t)\|_D \|v_{Ntz}^\epsilon\|_D^2 C_3.$$

Умножим (1.3.9) на $\frac{d}{dt} \alpha_{Nj}(t)$, суммируем по $j = 1, \dots, N$ и имеем

$$\begin{aligned} & \|v_{Nt}^\epsilon(t)\|_{L_2(D)}^2 + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} (\|v_{Nz}^\epsilon\|_\Omega^2 + \\ & + \frac{1}{\epsilon} \|v_{Nz}^\epsilon\|_{D_1}^2 + \int_{S_1} k(x) (v_N^\epsilon(t))^2 ds + \\ & + ((v_N^\epsilon(t) \nabla) v_N^\epsilon(t), v_N^\epsilon(t))_D = (f, v_{Nt}^\epsilon)_D. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Сложим (1.3.30), (1.3.31), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{Nt}^\epsilon(t)\|_D^2 + \mu \|v_{Nz}^\epsilon\|_\Omega^2 + \frac{1}{\epsilon} \|v_{Nz}^\epsilon\|_{D_1}^2 + \int_{S_1} k(x) (v_N^\epsilon(t))^2 ds + \\ & + \left(\frac{\mu}{2} - \|v_{Nz}^\epsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} C_2 - C_3 \|\nabla v_N^\epsilon(t)\|_D - \right. \\ & - C_4 \|\nabla v_N^\epsilon(t)\| \|v_{Ntz}^\epsilon\|_D^2 + \frac{\mu}{3} \|v_{Ntz}^\epsilon\|_\Omega^2 + \frac{\mu}{3\epsilon} \|v_{Ntz}^\epsilon\|_{D_1}^2 + \\ & \left. + \left(\frac{\mu}{\epsilon} - C_1 \|v_{Nz}^\epsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} \|v_N^\epsilon(t)\|_{D_1} \right) \|v_{Nz}^\epsilon(t)\|_{D_1}^2 \leq C \|f\|_{V_1}^2. \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Положим

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} - C_2 \|v_{Nz}^\epsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} - (C_3 + C_4) \|\nabla v_N^\epsilon(t)\| \geq \delta_1 \geq 0, \\ & \frac{\mu}{\epsilon} - C_1 \|v_N^\epsilon(t)\|_{D_1}^{1/2} \|\nabla v_N^\epsilon(t)\|_{D_1} \geq \delta_2 > 0. \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

Условия (1.3.33) выполняются при достаточно большом μ и малом ϵ . Итак нами получена априорная оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 < t \leq T} (\|v_N^\epsilon(t)\|_D^2 + \|v_{zN}^\epsilon(t)\|_D^2 + \frac{1}{\epsilon} (\|v_{Nz}^\epsilon(t)\|_{D_1}^2 + \\ & + \int_{S_1} k(x) (v_N^\epsilon(t))^2 dS) + \|v_{Nz}^\epsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D))}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|v_{Nz}^\epsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D_1))}^2 \leq \\ & \leq C (\|f\|_{L_2(0,T;V^*(D))}^2 + \|v_{Nt}^\epsilon(0)\|^2) \leq C < \infty. \end{aligned}$$

Оценка скорости сходимости решения задачи (1.3.4), (1.3.6).

Пусть $v^{\varepsilon_1}, v^{\varepsilon_2}$ - решения задачи (1.3.4)-(1.3.6), соответствующие параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Обозначим $u^\varepsilon = v^{\varepsilon_1} - v^{\varepsilon_2}$. Тогда для u^ε получаем тождество

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u^\varepsilon, \varphi)_D + ((u^\varepsilon \nabla) v^{\varepsilon_1} + (v^{\varepsilon_2} \nabla) u^\varepsilon, \varphi)_D + \mu (\nabla u^\varepsilon, \nabla \varphi)_D + \\ + \mu \left(\frac{\nabla v^{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} - \frac{\nabla v^{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2}, \nabla \varphi \right)_D + \mu \int_{S_1} \left(\frac{v^{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} - \frac{v^{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2}, \varphi \right) ds. \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

Теперь φ положим равным u^ε , учитывая что

$$\int_0^T \left(\frac{\|\nabla v^{\varepsilon_1}(t)\|^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{\|\nabla v^{\varepsilon_2}(t)\|^2}{\varepsilon_2^2} \right) dt \leq C < \infty,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1^2} \int_0^T \|v^{\varepsilon_1}\|_{L_2(S_1)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon_2^2} \int_0^T \|v^{\varepsilon_2}\|_{L_2(S_1)}^2 dt \leq C < \infty.$$

Из (1.3.34) получим неравенство

$$\|v^{\varepsilon_1} - v^{\varepsilon_2}\|_{L_\infty(0, T; L_2(D))}^2 \leq C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (1.3.35)$$

1.4 Метод конечных разностей для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости

Построение эффективных численных алгоритмов для решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости представляет большой интерес специалистам в области вычислительной гидродинамики. При рассмотрении этой системы в естественных переменных возникают вычислительные трудности, обусловленные отсутствием граничного условия для давления на твердых стенках и построением сетки в областях со сложной геометрией. Численному решению уравнений Навье-Стокса в переменных скорость, давление посвящены работы [28]- [35]. Для построения вычислительных алгоритмов используются различные способы. Например, метод искусственной сжимаемости в [28], метод маркеров и ячеек [29], методы основанные на ϵ - аппроксимации в [6,31] и другие методы [32]- [35].

В последнее время для численного решения уравнений математической физики широко применяется метод фиктивных областей [38]. В работах [51], [55] метод фиктивных областей используется для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. На границе вспомогательной области ставились такие же граничные условия как на границе исходной, т.е. проблема постановки граничных условий для давления оставалась. В работе [177] метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса впервые используется как метод моделирование граничных условий для давления.

В настоящем подразделе предлагается разностная схема для численного решения уравнений Навье-Стокса методом фиктивных областей. Построен эффективный итерационный метод для решения вспомогательной задачи, скорость сходимости которого не зависит от малого параметра ϵ . После некоторых преобразований для определения давления удается получить разностную задачу Дирихле.

1.4.1 Итерационные методы решения стационарных уравнений Стокса.

Рассмотрим в области $\Omega \subset R^2$ уравнения Стокса.

$$\mu \Delta v - \nabla p = f, \quad (1.4.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0$$

с граничным условием

$$v|_S = 0, \quad (1.4.2)$$

Выберем область D являющимся прямоугольником и такой, что $\Omega \subset D$. S_1 - граница области D . Соответствующая вспомогательная задача в методе фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам сводится к решению системы дифференциальных уравнении

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu^e \nabla v^e) - \nabla p^e &= f, \\ \operatorname{div} v^e &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

в области D , с граничными условиями

$$v^e \cdot \tau|_{S_1} = 0, p^e|_{S_1} \neq 0, \quad (1.4.4)$$

с условиями согласования:

$$[\mu^e \frac{\partial v^e}{\partial n} - \delta \cdot \eta p^e]|_S = 0, [v^e]|_S = 0 \quad (1.4.5)$$

Разобьем область D на элементарные ячейки плоскостями.

$$x_{lk} = k_l \cdot h_l, l = 1, 2, k_l = 0, 1, 2, \dots, N_l, h_l > 0.$$

Обозначим, через

$$D_h = \{(x_{1k}, x_{2k}) = (k_1 h_1, k_2 h_2) \in D\} \quad (1.4.6)$$

множество вершин элементарных ячеек, S_h^0 - ее границу.

Введем следующие обозначения

$$S_{1h} = \{(0, k_2 h_2), k_2 = 0, 1, \dots, N_2\}, S_{2h} = \{(k_1 h_1, 0), k_1 = 1, 2, \dots, N_1\},$$

$$S_{3h} = \{(l_1, k_2 h_2), k_2 = 0, 1, \dots, N_2\}, S_{4h} = \{(k_1 h_1, l_2), k_1 = 1, 2, \dots, N_1\},$$

Очевидно, что $S_h^0 = S_{1h} \cup S_{2h} \cup S_{3h} \cup S_{4h}$.

Обозначим $\Gamma_1 = S_{2h} \cup S_{4h}$, $\Gamma_2 = S_{1h} \cup S_{3h}$.

Введем некоторые обозначения для разностных отношении по x_i :

$$v_{x_i} = \frac{1}{h_i} [v(x + h e^i) - v(x, t)], v_{x_i} = \frac{1}{h_i} [v(x) - v(x - h e^i)],$$

и сдвигов по x_i

$$\bar{v}^i = v(x \pm h e^i),$$

где e^i - орт, направленный по оси x_i .

Кроме того, пусть для $v_h = (v_{1h}, v_{2h}, v_{3h}, \dots, v_{nh})$.

$$(v_h)^2 = \sum_{i=1}^n v_{ih}^2, v_{hx}^2 = \sum_{k=1}^n v_{hxk}^2 = \sum_{i,k=1}^n (v_{ikhk})^2,$$

$$v_{hx}^2 = \sum_{k=1}^n v_{hxk}^2 = \sum_{i,k=1}^n (v_{ikhk})^2,$$

где суммирование по i и k ведется в пределах от 1 до $n=3$ в трехмерных задачах и от 1 до 2 в плоских. Далее введем скалярные произведения и нормы $(f_n, v_n) = h^n \sum_{D_h} f_{ih} v_{ih}$,

$$\|v_h\|^2 = h^n \sum_{D_h} v_h^2, \|v_{hx}\|^2 = h^2 \sum_{D_h \cup S_{1h}} v_{hx}^2,$$

Индекс h у функции v_h означает, что v рассматривается только в точках решетки, а значок k у v_h^k будет указывать, что v_h берется на слое $t = k\Delta t$.

Для произвольных функции u_h и v_h заданных на решетке, справедливы следующие легко проверяемые соотношения.

$$(u_h v_h)_{x_i} = u_{hx_i} \cdot v_h + \bar{u}_h^i \cdot v_{hx_i} = u_{hx_i} \cdot \bar{v}_h^i + u_h \cdot v_{hx_i},$$

$$(u_h v_h)_{x_i} = u_{hx_i} \cdot v_h + \bar{u}_h^i \cdot v_{hx_i} = u_{hx_i} \cdot \bar{v}_h^i + u_h \cdot v_{hx_i},$$

$$2\Delta t u_i^k \cdot u^k = (u^k)^2 - (u^{k-1})^2 + (\Delta t)^2 (u_i^k)^2,$$

$$h \sum_{l=0}^{m-1} u_{hx}(l) v_h(l) = -h \sum_{l=1}^m u_h(l) v_{hx}(l) + u_h(m) v_h(m) - u_h(0) v_h(0),$$

в которых $u_i^k = \frac{1}{\Delta t} (u^k - u^{k-1})$, $u_{hx}(l) = \frac{1}{h} (u_h(l+1) - u_h(l))$.

$u_{hx}(l) = \frac{1}{h} (u_h(l) - u_h(l-1))$. Из последней формулы следует формула

$$h^n \sum_{D_h} u_{hx} v_h = -h^n \sum_{D_h} v_{hx} u_h$$

если $v_h|_{S_0} = 0$. Оба суммирование в ней можно считать проведенными по всем точкам \bar{D}_h , если положить v_h равной нулю вне D_h , а u_h распространить вне D_h произвольным образом.

Аппроксимируем (1.4.3)-(1.4.5) следующими разностными схемами:

$$(\mu_1^x v_{1hx_1})_{x_1} + (\mu_2^x v_{1hx_2})_{x_2} - p_{x_1} = f_{1h}, \quad (1.4.7)$$

$$\begin{aligned}
 (\mu_1^\epsilon v_{2h\bar{x}_1})_{x_1} + (\mu_2^\epsilon v_{2h\bar{x}_2})_{x_2} - p_{x_2} &= f_{2h}, \\
 v_{1\bar{x}_1} + v_{2\bar{x}_2} &= 0 \text{ в } D_h \\
 v_{1h}|_{\Gamma_1} = 0, v_{2h}|_{\Gamma_2} = 0, p|_{S_h^0} &= 0, \\
 v_{1x_1}|_{S_1} = 0, v_{1\bar{x}_1}|_{S_3} = 0, v_{2x_2}|_{S_2} = 0, v_{2\bar{x}_2}|_{S_4} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

здесь

$$\begin{aligned}
 (\mu^\epsilon v_{kh\bar{x}_1})_{x_1} &= [\mu_{1i+1/2}^\epsilon (v_{khi+1j} - v_{khij}) - \mu_{1i-1/2}^\epsilon (v_{khij} - v_{khi-1j})] / h_1^2, \\
 (\mu_2^\epsilon v_{kh\bar{x}_2})_{x_2} &= [\mu_{2ij+1/2}^\epsilon (v_{khi j+1} - v_{khij}) - \mu_{2ij-1/2}^\epsilon (v_{khij} - v_{khi j-1})] / h_2^2, \\
 p_{x_1} &= (p_{i+1j} - p_{ij}) / h_1, p_{x_2} = (p_{ij+1} - p_{ij}) / h_2,
 \end{aligned}$$

где $\mu_{1i+1/2}^\epsilon = (\mu_{2i+1}^\epsilon + \mu_{1ij}^\epsilon) / 2$, $\mu_{2ij+1/2}^\epsilon = (\mu_{2ij+1}^\epsilon + \mu_{2ij}^\epsilon) / 2$.

Для численного решения (2.4.7), (2.4.8) построим итерационный процесс.

$$B \frac{v_{1h}^{n+1} - v_{1h}^n}{\tau} = (\mu_1^\epsilon v_{1h\bar{x}_1}^n)_{x_1} + (\mu_2^\epsilon v_{1h\bar{x}_2}^n)_{x_2} - p_{x_1}^{n+1} - f_{1h}, \text{ в } D_h \tag{1.4.9}$$

$$B \frac{v_{2h}^{n+1} - v_{2h}^n}{\tau} = (\mu_1^\epsilon v_{2h\bar{x}_1}^n)_{x_1} + (\mu_2^\epsilon v_{2h\bar{x}_2}^n)_{x_2} - p_{x_2}^{n+1} - f_{2h}, \text{ в } D_h \tag{1.4.10}$$

$$v_{1h\bar{x}_1}^{n+1} + v_{2h\bar{x}_2}^{n+1} = 0, \text{ в } D_h \tag{1.4.11}$$

$$v_{1h}^{n+1}|_{\Gamma_1} = 0, v_{2h}^{n+1}|_{\Gamma_2} = 0, p^{n+1}|_{S_h^0} = 0,$$

$$v_{1x_1}^{n+1}|_{S_1} = 0, v_{1\bar{x}_1}^{n+1}|_{S_3} = 0, v_{2x_2}^{n+1}|_{S_2} = 0, v_{2\bar{x}_2}^{n+1}|_{S_4} = 0 \tag{1.4.12}$$

где B - матрица $\{b_{ij}\}$ состоящей из диагональных элементов оператора.

$Av = (\mu_1^\epsilon v_{\bar{x}_1})_{x_1} + (\mu_2^\epsilon v_{\bar{x}_2})_{x_2}$ т.е.

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \frac{\mu_{1i+1/2}^\epsilon + \mu_{1i-1/2}^\epsilon + \mu_{2ij+1/2}^\epsilon + \mu_{2ij-1/2}^\epsilon}{2} = \\
 &= \frac{\mu_{1i+1j}^\epsilon + 2\mu_{1ij}^\epsilon + \mu_{1i-1j}^\epsilon + \mu_{2ij+1}^\epsilon + 2\mu_{2ij}^\epsilon + \mu_{2ij}^\epsilon}{4}
 \end{aligned}$$

Обозначим $v_h^{n+1} = (v_{1h}^{n+1}, v_{2h}^{n+1})$, $v_h = (v_{1h}, v_{2h})$

$\omega^{n+1} = (\omega_1^{n+1}, \omega_2^{n+1}) = (v_{1h}^{n+1} - v_{1h}, v_{2h}^{n+1} - v_{2h})$, $q^{n+1} = p^{n+1} - p^n$

$q_x^{n+1} = (q_{x_1}^{n+1}, q_{x_2}^{n+1})$

Тогда для ω^{n+1} получаем разностные уравнения

$$B \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = A\omega^n - q_x^{n+1} \tag{1.4.13}$$

$$\omega_{1x_1}^{n+1} + \omega_{2x_2}^{n+1} = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} & \omega_1^{n+1}|_{\Gamma_1} = 0, \omega_2^{n+1}|_{\Gamma_2} = 0, q^{n+1}|_{S_0} = 0, \\ & \omega_{1x_1}^{n+1}|_{S_1} = 0, \omega_{1x_1}^{n+1}|_{S_2} = 0, \omega_{2x_2}^{n+1}|_{S_3} = 0, \omega_{2x_2}^{n+1}|_{S_4} = 0, \end{aligned}$$

Умножим (1.4.13) на $2\tau\omega^{n+1}$ скалярно в L_2 и имеем

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 - \|B^{1/2}\omega^n\|^2 + \|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 + 2\tau(A^{1/2}\omega^n, A^{1/2}\omega^{n+1}) = 0, \quad (1.4.14)$$

Преобразуем левую часть (1.4.14)

$$\begin{aligned} & (A^{1/2}\omega^n, A^{1/2}\omega^{n+1}) = (A^{1/2}\omega^n, A^{1/2}\omega^n) + \\ & + (A^{1/2}\omega^n, A^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)) = \|A^{1/2}\omega^n\|^2 - \|A^{1/2}\omega^{n+1} - A^{1/2}\omega^n\|^2 + \\ & + (A^{1/2}\omega^{n+1} - A^{1/2}\omega^n, A^{1/2}\omega^{n+1}) = \|A^{1/2}\omega^n\|^2 - \|A^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 + \\ & + \frac{1}{2}(\|A^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 - \|A^{1/2}\omega^n\|^2 + \|A^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2) = \\ & = \frac{1}{2}(\|A^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 + \|A^{1/2}\omega^n\|^2 - \|A^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2), \end{aligned}$$

В результате получим

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 + \tau(\|A^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 + \|A^{1/2}\omega^n\|^2) + \|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 - \tau\|A^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 = \|B^{1/2}\omega^n\|^2 \quad (1.4.15)$$

Имеет место неравенство [11]

$$\begin{aligned} & \gamma_0 B \leq A \leq \gamma_1 B, \quad (1.4.16) \\ & \gamma_1 = 4\max(4/h_1^2, 4/h_2^2), \end{aligned}$$

γ_0 - положительная постоянная не зависящая от ϵ , зависящая от размера области D и минимума μ^2 . Используя (1.4.16) преобразуем (1.4.15)

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 + \tau\gamma_0(\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 + \|B^{1/2}\omega^n\|^2) + (1 - \tau\gamma_1)\|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 \leq \|B^{1/2}\omega^n\|^2,$$

Предположим $1 - \tau\gamma_1 \geq 0$. В результате получим оценку

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 \leq \frac{1 - \tau\gamma_0}{1 + \tau\gamma_0} \|B^{1/2}\omega^n\|^2,$$

Отсюда имеем

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 \leq \left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^n \|B^{1/2}\omega^0\|^2, \xi = \gamma_0/\gamma_1,$$

т.е. скорость сходимости итерационного процесса не зависит от значения малого параметра.

Остановимся на численной реализации схемы (1.4.9)-(1.4.12). Так как $B = \{d_{ij}\}$ из (1.4.9)-(1.4.12) имеем

$$\left(\frac{1}{d}p_{z_1}^{n+1}\right)_{z_1} + \left(\frac{1}{d}p_{z_2}^{n+1}\right)_{z_2} = \tau F_1$$

где

$$F_1 = \left(\frac{1}{d}((\mu_1^e v_{1h\bar{z}_1})_{z_1} + (\mu_2^e v_{1h\bar{z}_1})_{z_2})\right)_{z_1} + \\ + \left(\frac{1}{d}((\mu_1^e v_{2h\bar{z}_1})_{z_1} + (\mu_2^e v_{2h\bar{z}_2})_{z_2})\right)_{z_2} - f_{1z_1} - f_{2z_2} \quad (1.4.17)$$

$$p^{n+1}|_{S_0^*} = 0, \quad (1.4.18)$$

Получаем разностную задачу Дирихле (1.4.17), (1.4.18) с сильно меняющимися коэффициентами. Ее решаем эффективным итерационным методом скорость сходимости которого не зависит от изменения малого параметра [11], [38]. Затем из уравнений (1.4.9), (1.4.10) находим v^{n+1} .

Чтобы ослабить условие $1 - \tau\gamma_1 \geq 0$ рассмотрим разностную схему с оператором

$$B = \{d_{ij}\}, \quad d_{ij} = b_{ij} \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right).$$

Тогда имеет место неравенство:

$$\gamma_0 \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1} B \leq A \leq \gamma_1 \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1} B.$$

Обозначим

$$\kappa_1 = \gamma_0 \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1},$$

$$\kappa_2 = \gamma_1 \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1},$$

κ_1, κ_2 - постоянные равномерно зависящие от h_1, h_2 . Используя обозначения имеем $\kappa_1 B \leq A \leq \kappa_2 B$.

Тогда получим оценку

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 \leq \frac{1 - \tau\kappa_1}{1 + \tau\kappa_1} \|B^{1/2}\omega^n\|^2 \quad (1.4.19)$$

при $1 - \tau \kappa_2 \geq 0$. Итак доказано, что скорость сходимости итерационного метода не зависит от ε .

1.4.2 Итерационные методы для решения стационарных уравнений Навье-Стокса.

Обозначим

$$F(v_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\bar{v}_k v_{ix_k} + v_k v_{ix_k}).$$

Рассмотрим схему аппроксимирующую стационарные уравнения в методе фиктивных областей.

$$F(v) = Av - \nabla_h p + f_h, \quad (1.4.20)$$

$$v_{1hx_1} + v_{2hx_2} = 0,$$

$$v_{1h}|_{\Gamma_1} = 0, v_{2h}|_{\Gamma_2} = 0, p^{n+1}|_{S_h} = 0, \quad (1.4.21)$$

где $F(v) = (F(v_1), F(v_2))$, $f_h = (f_{1h}, f_{2h})$.

Заметим, что

$$(F(v), v) = \sum_{D_h} (F(v_1)v_1 + F(v_2)v_2)h_1h_2 = 0,$$

Для решения задачи (1.4.20), (1.4.21) имеет место оценка

$$\|A^{1/2}v\| \leq C\|f\| \leq C < \infty \quad (1.4.22)$$

Из оценки (1.4.22) следует, что существует хотя бы одно решение задач (1.4.20), (1.4.21).

Для приближенного нахождения решение задачи (1.4.20), (1.4.21) на ЭВМ предлагаем следующий итерационный метод

$$B \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = Av^n - \nabla_h p^{n+1} + f_n - F(v^n), \quad (1.4.23)$$

$$v_{1hx_1}^{n+1} + v_{2hx_2}^{n+1} = 0,$$

$$v_{1h}^{n+1}|_{\Gamma_1} = 0, v_{2h}^{n+1}|_{\Gamma_2} = 0, p_h^{n+1}|_{S_h^0} = 0,$$

$$v_{1x_1}^{n+1}|_{S_1} = 0, v_{1x_1}^{n+1}|_{S_3} = 0, v_{2x_2}^{n+1}|_{S_2} = 0, v_{2x_2}^{n+1}|_{S_4} = 0, \quad (1.4.24)$$

Обозначим $\omega_h^{n+1} = v_h^{n+1} - v_h$, $q_h^{n+1} = p_h^{n+1} - p_h$. для ω_h^{n+1} получаем задачу

$$B \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = A\omega^n - \nabla_h q_{n+1} - (F(v^n) - F(v)),$$

$$\omega_{1hx_1}^{n+1} + \omega_{2hx_2}^{n+1} = 0, \quad (1.4.25)$$

$$\omega_{1h}^{n+1}|_{\Gamma_1} = 0, \omega_{2h}^{n+1}|_{\Gamma_2} = 0, q_h^{n+1}|_{S_h^0} = 0,$$

$$\omega_{1x_1}^{n+1}|_{S_1} = 0, \omega_{1x_1}^{n+1}|_{S_3} = 0, \omega_{2x_2}^{n+1}|_{S_2} = 0, \omega_{2x_2}^{n+1}|_{S_4} = 0. \quad (1.4.26)$$

Уравнение (1.4.25) умножим на $2\tau h^2 \omega^{n+1}$ суммируем по области D_h

$$\begin{aligned} & \|B^{1/2} \omega^{n+1}\|^2 + \tau(\|A^{1/2} \omega^{n+1}\|^2 + \|A^{1/2} \omega^n\|^2) + \\ & + \|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 - \tau(\|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 = \quad (1.4.27) \\ & = \|B^{1/2} \omega^n\|^2 + \tau(F(v^n) - F(v), \omega^{n+1})_{D_h}, \end{aligned}$$

Для простоты опускаем индекс h и преобразуем следующие выражения

$$\begin{aligned} F(v_i^n) - F(v_i) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\bar{v}_k^n - \bar{v}_k) v_{ix_k} + \\ & + \bar{v}_k^n (v_{ix_k}^n - v_{ix_k}) + (v_k^n - v_k) v_{ix_k} + v_k^n (v_{ix_k}^n - v_{ix_k}) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\bar{\omega}_k^n v_{ix_k}^n + \omega^n v_{ix_k} + \bar{v}_k^n \omega_{ix_k}^n + v_k^n \omega_{ix_k}^n), \\ & 2\tau \sum_{D_h} (F(v^n) - F(v), \omega^{n+1})_{h_1 \cdot h_2} = \\ & = \tau \left(\sum_{k,i} (\bar{\omega}_k^n v_{ix_k} + \omega_k^n v_{ix_k} + \bar{v}_k^n \omega_{ix_k}^n + \right. \\ & \left. + v_k^n \cdot \omega_{ix_k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h} + \tau \sum_{k,i} (\bar{\omega}_k^n v_{ix_k} + \omega_k^n v_{ix_k}, \bar{\omega}_i^n)_{D_h}, \right. \end{aligned}$$

Оцениваем последнее слагаемое этого выражения

$$\begin{aligned} \tau \left(\sum_{k,i} (\bar{\omega}_k^n v_{ix_k} + \omega_k^n v_{ix_k}, \bar{\omega}_i^n) \right) &\leq \tau \|v_x\|_{L_2(D_h)} \|\omega^n\|_{L_4(D_h)} \leq \\ &\leq \frac{C_1 \tau \|v_x\|_{L_2(D_h)}}{\mu} \|A^{1/2} \omega^n\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \left| \sum_{k,i} (\bar{\omega}_k^n v_{ix_k}, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h} \right| &\leq \tau \|v_x\|_{L_2(D_h)} \|\omega^n\|_{L_4(D_h)} + \\ &+ (\|\omega^{n+1}\|_{L_4(D_h)} \|\omega^n\|_{L_4(D_h)}) \leq \frac{C_2 \tau \|v_x\|_{L_2(D_h)}}{\mu} \cdot (\|A^{1/2} \omega^n\|^2 + \|A^{1/2} \omega^{n+1}\|^2), \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \tau (\bar{v}_k^n \cdot \omega_{ix_k}^n + v_k^n \cdot \omega_{ix_k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h} &= \tau (\bar{\omega}_k^n \cdot \omega_{ix_k}^n + \\ &+ \omega_k^n \cdot \omega_{ix_k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h} + \tau (v_k^n \cdot \omega_{ix_k}^n + v_k \cdot \omega_{ix_k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h} \end{aligned}$$

получим оценки

$$\tau |(\bar{v}_k^k \cdot \omega_{i\bar{x}_k}^n + \bar{v}_k^k \cdot \omega_{i\bar{x}_k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h}| \leq C_\tau \|\omega_z^n\|_{D_h} \|v_z^n\|_{D_h} \cdot (\|\omega^{n+1}\|_{D_h} + \|\omega^n\|_{D_h}) \leq \frac{C_3 \tau}{\mu} \|v_z^n\|_{D_h} (\|\omega^{n+1}\|^2 + \|\omega^n\|^2),$$

$$\tau |(\bar{\omega}_k^k \cdot \omega_{i\bar{x}_k}^n + \omega_k^n \cdot \omega_{i\bar{x}_k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h}| \leq C_\tau \|\omega^n\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\omega^{n+1} - \omega^n\| \leq \frac{C_\tau}{h} \|\omega^n\| \|\omega_z^n\| \cdot \|\omega^{n+1} - \omega^n\| \leq C_\tau \|\omega^n\| A^{1/2} \omega^n \|B^{1/2} \omega^n\|.$$

$$\|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\| \leq \delta \tau \|A^{1/2} \omega^n\|^2 + C_\delta \|B^{1/2} \omega^n\|^2 \frac{\tau}{h^2} \cdot \|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2$$

Теперь положим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{\tau}{\mu} \|v_z\|_{D_h} (C_1 + C_2 + C_3) - \delta &\geq 0, \\ \frac{1}{2} - C_\delta \|B^{1/2} \omega^n\| \frac{\tau}{h^2} &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Условия (1.4.28) выполняются при достаточно малом ϵ и τ , причем постоянные в неравенствах (1.4.28) не зависят от ϵ . Из (1.4.27) и (1.4.28) получим неравенство:

$$\|B^{1/2} \omega^{n+1}\| + \frac{\tau}{2} (\|A^{1/2} \omega^{n+1}\| + \|A^{1/2} \omega^n\|^2) + \frac{1}{2} \|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 - \|A^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 \leq \|B^{1/2} \omega^n\|^2 \quad (1.4.29)$$

Используя условие (1.4.16) имеем

$$(1 + \tau/2 \cdot \gamma_0) \|B^{1/2} \omega^{n+1}\|^2 + (1/2 - \tau \gamma_1) \|B^{1/2}(\omega^{n+1} - \omega^n)\|^2 \leq \|B^{1/2} \omega^n\|^2 (1 - \tau/2 \gamma_0)$$

Итак получим

$$\begin{aligned} \|B^{1/2} \omega^{n+1}\| &\leq \frac{1 - \tau/2 \gamma_0}{1 + \tau/2 \gamma_0} \|B^{1/2} \omega^n\| \leq \\ &\leq \left(\frac{1 - \tau/2 \gamma_0}{1 + \tau/2 \gamma_0}\right)^n \|B^{1/2} \omega^0\| = \rho^n \cdot \|B^{1/2} \omega^0\|^2, \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

где $\rho < 1$.

Чтобы выполнялось второе условие (1.4.28), достаточно чтобы τ удовлетворял условию $\tau \leq \frac{h^2}{2C_\delta \|B^{1/2} \omega_0\|^2}$, где $\omega_0 = v_h^0 - v_h$.

Положим $v_h^0 = 0$, тогда

$$\|B^{1/2} \omega_0\| = \|B^{1/2} v_h\| \leq \gamma_1 \|A^{1/2} v_h\| \leq C c_0 < \infty$$

C_0 не зависит от шага сетки и малого параметра ϵ . Итак доказана следующая

Теорема 1.12 Пусть A, B - положительно определенные и самосопряженные операторы и выполнены условия (1.4.16), (1.4.28). Тогда итерационная схема (1.4.23), (1.4.24) сходится к решению задачи (1.4.20), (1.4.21).

В случае $D \subset R^3$ нелинейные слагаемые оцениваем следующим образом

$$\begin{aligned} \tau |(\omega_k^{k^n} \cdot \omega_{i\bar{x}_k}^n + \omega_k^n \cdot \omega_{2k}^n, \omega_i^{n+1} - \omega_i^n)_{D_h}| &\leq C(\tau/h) \|\omega^n\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\omega^{n+1} - \omega^n\| \\ &\leq C(\tau/h) \|\omega^n\|^{1/2} \|\omega_{\bar{x}}^n\|^{3/2} \cdot \|\omega^{n+1} - \omega^n\| \leq \\ &\leq C(\tau/h) \|A^{1/2}\omega^n\|^{3/2} \|B^{1/2}\omega^n\|^{1/2} \|\omega^{n+1} - \omega^n\| \leq \\ &\leq \delta \|\omega^{n+1} - \omega^n\|^2 + C_\delta \frac{\tau^2}{h^3} \|B^{1/2}\omega^n\| \|A^{1/2}\omega^n\|^2 \end{aligned}$$

Теперь положим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{\tau}{\mu} \|v_z\| (C_1 + C_2 + C_3) - \frac{\tau}{h^3} C_\delta \|B^{1/2}\omega^n\| &\geq 0 \\ \frac{1}{2} - \delta &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

Отсюда получим оценку (1.4.30) сходимости итерационного метода в $D \subset R^3$.

Рассмотрим разностную схему стационарных уравнений Навье-Стокса в переменных поле скорости и полного напора

$$F(v) = Av - \nabla_h Q + f \quad (1.4.32)$$

$$v_{1x_1} + v_{2x_2} = 0$$

$$v_1|_{\Gamma_1 \cup S_{1h} \cup S_{2h}} = 0, v_2|_{\Gamma_2 \cup S_{2h} \cup S_{3h}} = 0, Q|_{S_h} = 0. \quad (1.4.33)$$

Оператор A ранее определен.

$$F(v) = (-v_2 \cdot (v_{1x_2} - v_{2x_1}), v_1 \cdot (v_{1x_2} - v_{2x_1})).$$

Заметим, что для решения задачи (1.4.32), (1.4.33) имеет место оценка

$$\|A^{1/2}v\|_{D_h}^2 \leq C \|f\|_{L_2(D_h)}^2.$$

Решаем задачу (1.4.32), (1.4.33) итерационным методом:

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = Av^n - \nabla_h Q^{n+1} + f - F(y^n), \quad (1.4.34)$$

$$\begin{aligned}
 v_{1x_1}^{n+1} + v_{2x_2}^{n+1} &= 0 \\
 v^0 &= v_0(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \bar{D}_h \\
 v_1|_{\Gamma_1}^{n+1} &= 0, v_2|_{\Gamma_2}^{n+1} = 0, Q|_{S_h}^{n+1} = 0 \quad (1.4.35)
 \end{aligned}$$

где $F(v^n) = (-v_2^{n+1}(v_{1x_2}^n - v_{2x_1}^n), v_1^{n+1}(v_{1x_2}^n - v_{2x_1}^n))$.

При выполнении условия (1.4.16) для решения задачи (1.4.34), (1.4.35) имеем оценку

$$\begin{aligned}
 (1 + \tau\gamma_0) \|B^{1/2}v^{n+1}\|^2 + (1 - \tau\gamma_1) \|B^{1/2}(v^{n+1} - v^n)\|^2 &\leq \\
 (1 - \tau\gamma_0) \|B^{1/2}v^n\|^2 + \tau \|f\| \|B^{1/2}v^{n+1}\| &\leq \\
 \leq (1 - \tau\gamma_0) \|B^{1/2}v^n\|^2 + \frac{\tau\gamma_0}{2} \|B^{1/2}v^{n+1}\|^2 + \tau C_1 \|f\|^2
 \end{aligned}$$

Отсюда при выполнении условия $(1 - \tau\gamma_1) \geq 0$ следует оценка $\|B^{1/2}v^{n+1}\| \leq C_0 < \infty$,

где постоянная C_0 не зависит от ϵ и от номера итерации. Здесь мы использовали соотношение

$$(F(v^n), v^{n+1})_{D_h} = 0.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 (F(v^n) - F(v), v^{n+1} - v)_{D_h} &= ((-v_2^{n+1} + v_2)(v_{1x_2}^n - v_{2x_1}^n) - \\
 -v_2((v_1^n - v_1)_{x_2} - (v_2^n - v_2)_{x_1}), \omega_1^{n+1})_{D_h} &+ ((v_1^{n+1} - v_1)(v_{1x_2}^n - v_{2x_1}^n) + \\
 + v_1((v_1^n - v_1)_{x_2} - (v_2^n - v_2)_{x_1}), \omega_2^{n+1})_{D_h} &= \\
 = -(v_2(\omega_{1x_2}^n - \omega_{2x_1}^n), \omega_1^{n+1})_{D_h} &+ (v_1(\omega_{1x_2}^n - \omega_{2x_1}^n), \omega_2^{n+1})_{D_h}
 \end{aligned}$$

Оценим это выражение

$$\begin{aligned}
 |(F(v^n) - F(v), v^{n+1} - v)_{D_h}| &= |-(v_2(\omega_{1x_2}^n - \omega_{2x_1}^n), \omega_1^{n+1})_{D_h} + \\
 + (v_1(\omega_{1x_2}^n - \omega_{2x_1}^n), \omega_2^{n+1})_{D_h}| &\leq C \|v_x\|_{L_2(D_h)} \cdot \|\omega_x^n\| \cdot \|\omega_x^{n+1}\| \leq \\
 \leq \frac{C_2 \|v_x\|}{2\mu} (\|A^{1/2}\omega^n\|^2 + \|A^{1/2}\omega^{n+1}\|^2);
 \end{aligned}$$

положим $\frac{1}{2} - \frac{C_2}{2\mu} \|v_x\| \geq 0$.

Используя полученные оценки легко доказывается следующая

Теорема 1.13. Пусть выполнены условия (1.4.16) и

$$\frac{1}{2} - \frac{C_2}{2\mu} \|v_x\| \geq 0, 1/2 - \tau\gamma_1 \geq 0.$$

Тогда решение итерационной схемы (1.4.34), (1.4.35) сходится к решению задачи (1.4.32), (1.4.33) со скоростью

$$\|B^{1/2}\omega^{n+1}\|^2 \leq \left(\frac{1 - \tau\gamma_0/2}{1 + \tau\gamma_0/2}\right)^n \|B^{1/2}\omega^0\|^2,$$

Замечание. Условия сходимости итерационной схемы (1.4.32) (1.4.33) лучше чем условия сходимости итерационного метода (1.4.34) (1.4.24).

Аналогично можно исследовать схему второго порядка аппроксимации. В этом случае v_1, v_2, p аппроксимируется в узлах $((i + 1/2)h_1, jh_2)$, $(ih_1, (j + 1/2)h_2)$, (ih_1, jh_2) соответственно. Утверждение теорем 1.12 и 1.13 справедливо и в этом случае.

2. Метод разделения области для численного решения уравнений Навье-Стокса с разрывными коэффициентами.

При построении конечно-разностных схем для краевой задачи и составлении соответствующих программ для их численной реализации на ЭВМ возникают проблемы зависящие от геометрии области в которой ищется решение задачи и коэффициентов уравнений с сильно меняющимся в подобластях. Даже в случае линейных задач возникают затруднения, если расчетная область имеет достаточно сложную форму. В приложениях нередко возникают задачи (течения жидкости через пористые среды, магнитной гидродинамики, в теории теплопроводности полупроводниковых приборов), в которых коэффициенты уравнений сильно меняются в узкой части интегрируемой области.

Поэтому эффективными являются методы которые позволяют свести процесс решения исходной задачи к последовательности задач, рассматриваемых в подобластях более простой формы. В этом случае для решения системы уравнений можно успешно применить численный аналог альтернирующего метода Шварца [67]. Возможности этого для численного решения эллиптических краевых задач рассмотрены в работах [80], [74]. В работе [73] для решения эллиптических разностных уравнений, с сильно меняющимся в узких областях коэффициентам при старшей производной разработан численный аналог альтернирующего метода Шварца. Показана независимость скорости сходимости метода от разброса коэффициентов. В монографии [14] приведен достаточно подробный обзор этих методов и основные тенденции их развития.

В настоящем разделе разработана разностная схема основанная на методе разделения области, предназначенная для уравнений Навье-Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости с сильно меняющимися коэффициентами. Приведены примеры численного решения задачи в канале с пористой вставкой предлагаемым методом.

2.1 Моделирование задач гидродинамики в пористых средах методом разделения области. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую систему нелинейных уравнений, описывающих течение жидкости через пористую среду в области $\Omega = \{0 < x_i < l_i, \quad i = 1, 2\}$ с границей S [128]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) - k u_i + f_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование)
 где $\mathbf{v} = (u_1, u_2)$ - вектор скорости жидкости, p - давление, $k(x)$ - коэффициент проницаемости пористой среды, μ - коэффициент эффективной вязкости.

Системе уравнений (2.1.1) поставим следующие начально-граничные условия

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^0(x), \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{v}(0, t) = 0, \quad x \in S. \quad (2.1.2)$$

В области Ω функция $\mathbf{v}^0(x)$ задана, причем такая, что $\text{div} \mathbf{v}^0(x) = 0$. Функция $f(x)$, $\mu(x)$ и $k(x)$ также являются известными, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq k(x) \leq k_0, \quad 0 \leq \mu_0 \leq \mu(x) \leq \mu_1, \quad f(x, t) \in L_2(\Omega). \quad (2.1.3)$$

Предположим, что на границе раздела сред, т.е. на линии R при $x_1 = \xi$ функция $k(x)$, $\mu(x)$ и $f(x, t)$ терпят разрывы первого рода и выполняются следующие условия сопряжения

$$\left[p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right] = 0 \quad (2.1.4)$$

$$[u] = [v] = 0$$

где $[\Phi] = \Phi(\xi + 0, x_2, t) - \Phi(\xi - 0, x_2, t)$ скачок функции на линии $x_1 = \xi$. Здесь и в дальнейшем положим $u = u_1, v = u_2$. Предполагается также, что при $\bar{x} \in \Omega/R$ функции $\mu(x)$, $k(x)$ и $f(x)$ достаточно гладкие. Следовательно, решение начально-краевой задачи (2.1.1)-(2.1.4) обладает необходимыми свойствами при исследовании аппроксимации рассматриваемых разностных схем.

2.2 Описание конечно-разностной схемы и учет граничных условий.

При численном решении уравнений Навье-Стокса (2.1.1) используем сетку с разнесенными скоростями, которая позволяет обеспечить выполнение законов сохранения в разностном виде и использовать центрально-разностные аппроксимации второго порядка.

Для уравнений в естественных переменных на всех границах ставятся физические условия $\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\Gamma}$. Однако для определения давления из уравнения эллиптического типа требуется задать граничные условия, которые отсутствуют в исходной постановке.

Численные схемы для уравнений в переменных скорость-давление обобщаются на случай пространственных течений.

Широкое распространение при решении многомерных задач получили методы расщепления [126,130].

В области Ω построим сетку Ω_h , $\Omega_h = \omega_h \cup G_h \cup Q_h$, где

$$\omega_h = \{(x_{1i}, x_{2j}), x_{1i} = ih_1, x_{2j} = jh_2,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1; j = 0, 1, \dots, N_2, h_1 = l_1/N_1, h_2 = l_2/N_2\},$$

$$G_h = \{(x_{1i+1/2}, x_{2j}), x_{1i+1/2} = (i + 1/2)h_1, x_{2j} = jh_2,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1 - 1; j = 0, 1, \dots, N_2, h_1 = l_1/N_1, h_2 = l_2/N_2\},$$

$$Q_h = \{(x_{1i}, x_{2j+1/2}), x_{1i} = ih_1, x_{2j+1/2} = (j + 1/2)h_2,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1; j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, h_1 = l_1/N_1, h_2 = l_2/N_2\},$$

Как и в [126] в узлах с номерами $(i + 1/2, j)$ и $(i, j + 1/2)$ определяются значения соответственно продольной и поперечной компонент скорости, а в узлах с целыми номерами (i, j) — значения давления. Для простоты изложения предположим, что пространственная конечно-разностная сетка построена таким образом, что линия разрыва R совпадает с прямой $x_{1, i_0+1/2} = \xi$ где $1 \leq i_0 \leq N_1 - 2$ и для уравнений (2.1.1) рассмотрим следу-

ющую разностную схему

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n}{\tau} + L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2,j}^n + p_{x_1,ij}^{n+1} = - \overset{0}{k}_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^{n+1} + \\
 & + (2\mu_{ij} u_{x_1,i+1/2,j}^n)_{x_1} + (\overset{0}{a}_{i+1/2,j+1/2} (u_{x_2,i+1/2,j}^n + v_{x_1,ij+1/2}^n))_{x_2} + \\
 & + f_{i+1/2,j}, \quad i = \overline{1, N_1 - 2}, j = \overline{1, N_2 - 1} \\
 & \frac{v_{ij+1/2}^{n+1} - v_{ij+1/2}^n}{\tau} + L_{1h}^{(2)} v_{ij+1/2}^n + p_{x_2,ij}^{n+1} = - \overset{0}{k}_{ij+1/2} v_{ij+1/2}^{n+1} + \\
 & + (2\mu_{ij} v_{x_2,ij+1/2}^n)_{x_2} + (\overset{0}{a}_{i+1/2,j+1/2} (u_{x_2,i+1/2,j}^n + v_{x_1,ij+1/2}^n))_{x_1} + \\
 & + f_{i+1/2,j}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 2}
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{a}_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{h_2} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} \frac{dx_2}{\frac{1}{h_1} \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \frac{dx_1}{\mu(x_1, x_2)}}, \\
 \overset{0}{k}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_{2j-1/2}}^{x_{2j+1/2}} \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} k(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\
 \overset{0}{k}_{ij+1/2} &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_{1,i-1/2}}^{x_{1,i+1/2}} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} k(x_1, x_2) dx_1 dx_2,
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

для любой функции $k(x_1, x_2)$.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} v^n = u_{x_1, i+1/2,j}^{n+1} + v_{x_2, ij+1/2}^{n+1} = 0 \tag{2.2.3}$$

Операторы $L_{1h}^{(i)}$, $i = 1, 2$ соответствуют разностной аппроксимации конвективных членов и определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}^n &= \frac{1}{4h_1} ((u_{i+3/2j}^n + u_{i+1/2j}^n)^2 - (u_{i+1/2j}^n + u_{i-1/2j}^n)^2) + \\
&+ \frac{1}{4h_2} ((v_{i+1j+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)(u_{i+1/2j+1}^n + u_{i+1/2j}^n) - \\
&- (v_{i+1j-1/2}^n + v_{ij-1/2}^n)(u_{i+1/2j}^n + u_{i+1/2j-1}^n)), \\
L_{1h}^{(2)} v_{ij+1/2}^n &= \frac{1}{4h_1} ((u_{i+1/2j+1}^n + u_{i+1/2j}^n)(v_{i+1j+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n) - \\
&- (u_{i-1/2j+1}^n + u_{i-1/2j}^n)(v_{ij+1/2}^n + v_{i-1j+1/2}^n)) + \\
&+ \frac{1}{4h_2} ((v_{ij+3/2}^n + v_{ij+1/2}^n)^2 - (v_{ij+1/2}^n + v_{ij-1/2}^n)^2).
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

На границе сеточной области Ω_h согласно (2.1.2) положим

$$\begin{aligned}
v_{0j+1/2}^n &= v_{N_1j+1/2}^{n+1} = u_{1/2j}^{n+1} = u_{N_1-1/2j}^{n+1} = 0, \\
v_{i,1/2}^{n+1} &= v_{i,N_2-1/2}^{n+1} = u_{i+1/2,0}^{n+1} = u_{i+1/2,N_2}^{n+1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Легко показать, что при (2.2.5) граничные условия (2.1.2) аппроксимируются с порядком $O(h_1^2, h_2^2)$, где h_1, h_2 - шаги конечно-разностной сетки.

Для однозначного определения давления потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{\vec{x} \in \omega_h^{(1)}} p(\vec{x}) h_1 h_2 = 0 \tag{2.2.6}$$

где $\omega_h^{(1)} \subseteq \omega_h$.

Разностная задача (2.2.1) - (2.2.6) может быть реализована как схема расщепления по физическим процессам [126], которую в векторной форме можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^n}{\tau} + L_h \mathbf{v}^n &= \mathbf{f}_h(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega_h, \\
\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1/2}}{\tau} + \nabla_h p^{n+1} &= -\frac{0}{k} \mathbf{v}^{n+1}, \\
\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} &= 0
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

где L_h - соответствует разностной аппроксимации конвективных и диссипативных членов уравнений (2.1.1).

2.3 Априорные оценки для разностной задачи

В работе [165] доказана следующая лемма

Лемма 2.1 Для любых сеточных функций $u_{i+1/2j} \in G_h$, $v_{ij+1/2} \in Q_h$ удовлетворяющая условиям (2.2.3), (2.2.5) справедливы тождества

$$(L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}, u_{i+1/2j}) = (L_{1h}^{(2)} v_{ij+1/2}, v_{ij+1/2}) = 0 \quad (2.3.1)$$

где суммирование производится по внутренним узлам сетки $G_h \cup Q_h$.

Доказательство. Докажем, что $(L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}, u_{i+1/2j}) = 0$

$$\begin{aligned} (L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}, u_{i+1/2j}) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{M-1} [(u_{i+3/2j} + u_{i+1/2j})^2 u_{i+1/2j} - \\ &- (u_{i+1/2j} - u_{i-1/2j})^2 u_{i+1/2j} + (v_{i+1,j+1/2} + v_{ij+1/2})(u_{i+1/2j+1} + \\ &+ u_{i+1/2j}) u_{i+1/2j} - (v_{i+1,j-1/2} + v_{ij-1/2})(u_{i+1/2j} + u_{i+1/2j-1}) u_{i+1/2j}] h_1 h_2 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Для любых сеточных функций φ и ψ имеем

$$(\varphi_i \psi_i \psi_{i-1})_x = (\varphi_i \psi_i)_x \psi_i + \varphi_i \psi_i (\psi_{i-1})_x = \varphi_{ix} \psi_i^2 + (\varphi_{i+1} \psi_{ix} + \varphi_i \psi_{i-1,x}) \psi_i$$

Используя эту формулу и (2.2.4), преобразуем все слагаемые (2.3.2)

$$\begin{aligned} (u_{i+3/2j}(u_{i+1/2j})_{x_1} + u_{i+1/2j}(u_{i+1/2j})_{x_1}) u_{i+1/2j} &= \\ = (u_{i+1/2j} u_{i+1/2j} \cdot u_{i-1/2j})_{x_1} - (u_{i+1/2j})_{x_1} \cdot u_{i+1/2j}^2, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} (u_{i+1/2j}(u_{i+1/2j})_{x_1} + u_{i-1/2j} \cdot (u_{i+1/2j})_{x_1}) u_{i+1/2j} &= \\ = (u_{i-1/2j} u_{i+1/2j} \cdot u_{i-1/2j})_{x_1} - (u_{i-1/2j})_{x_1} \cdot u_{i+1/2j}^2, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} (v_{i+1,j+1/2}(u_{i+1/2j})_{x_2} + v_{i+1,j-1/2}(u_{i+1/2j})_{x_2}) u_{i+1/2j} &= \\ = (v_{i+1,j-1/2} u_{i+1/2j} u_{i+1/2j-1})_{x_2} - (v_{i+1,j-1/2})_{x_2} u_{i+1/2j}^2, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} (v_{ij+1/2}(u_{i+1/2j})_{x_2} + v_{ij-1/2}(u_{i+1/2j})_{x_2}) u_{i+1/2j} &= \\ = (v_{ij-1/2} u_{i+1/2j} u_{i+1/2j-1})_{x_2} - (v_{ij-1/2})_{x_2} u_{i+1/2j}^2 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Далее получим

$$\begin{aligned} (L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}, u_{i+1/2j}) = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{M-1} [(u_{i+1/2j} u_{i+1/2j} u_{i-1/2j})_{z_1} - \\ & - (u_{i+1/2j})_{z_1} u_{i+1/2j}^2 + (u_{i-1/2j} u_{i+1/2j} u_{i-1/2j})_{z_1} - (u_{i-1/2j})_{z_1} u_{i+1/2j}^2 + \\ & + (v_{i+1,j-1/2} u_{i+1/2j} u_{i+1/2j-1})_{z_2} - (v_{i+1,j-1/2})_{z_2} u_{i+1/2j}^2 + (v_{ij-1/2} \\ & u_{i+1/2j} u_{i+1/2j-1})_{z_2} - (v_{ij-1/2})_{z_2} u_{i+1/2j}^2] h_1 h_2 \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (2.2.3) и уравнения неразрывности (2.2.5) имеем

$$\begin{aligned} (L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}, u_{i+1/2j}) = & \frac{1}{4h_1} \sum_{j=1}^{M-1} [-u_{3/2j} u_{3/2j} u_{1/2j} + \\ & + u_{N-1/2j} u_{N-1/2j} u_{N-3/2j} - u_{1/2j} u_{3/2j} u_{1/2j} + \\ & + u_{N-3/2j} u_{N-1/2j} u_{N-3/2j}] h_1 h_2 + \frac{1}{4h_2} \sum_{i=1}^{N-2} [-v_{i+1,3/2} u_{i+1/2,1} u_{i+1/2,0} + \\ & + v_{i+1,M-1/2} u_{i+1/2,M} u_{i+1/2,M-1} - v_{i,1/2} u_{i+1/2,1} u_{i+1/2,0} + \\ & + v_{iM-1/2} u_{i+1/2M} u_{i+1/2M-1}] h_1 h_2 = 0 \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что $(L_{1h}^{(2)} v_{ij+1/2}, v_{ij+1/2}) = 0$.

В работе [158] получены основные априорные оценки для решения разностной задачи (2.2.1)-(2.2.6), исследованы аппроксимационные свойства и доказана теорема сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи (2.1.1)-(2.1.4). Умножая соотношения (2.2.1) соответственно на $2\tau u_{i+1/2j}^{n+1} h_1 h_2$ и $2\tau v_{ji+1/2}^{n+1} h_1 h_2$ затем просуммировав по точкам ω_h , получим следу-

ющее основное энергетическое неравенство

$$\begin{aligned} & \|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2 + \|v^{n+1} - v^n\|^2 + \\ & + 2\tau(L_{1h}v^n, v^{n+1}) + 2\tau(\sum_{\omega_h} p_{z_1}^{n+1} u_{i+1/2j}^{n+1} + \\ & + \sum_{\omega_h} p_{z_2}^{n+1} v_{ij+1/2}^{n+1}) h_1 h_2 + 2\tau d_h \leq 2\tau |(f^h, v^{n+1})| \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

где

$$\begin{aligned} d_h &= -(\sum_{\omega_h} L_{2h}^{(1)} u_{i+1/2j}^n u_{i+1/2j}^{n+1} + \sum_{\omega_h} L_{2h}^{(2)} v_{ij+1/2}^n v_{ij+1/2}^{n+1}) h_1 h_2 \\ (L_{1h}v^n, v^{n+1}) &= \sum_{\omega_h} L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}^n u_{i+1/2j}^{n+1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_h} L_{1h}^{(2)} v_{ij+1/2}^n v_{ij+1/2}^{n+1} h_1 h_2 \\ (f^h, v^{n+1}) &= \sum_{\omega_h} (f_{i+1/2j}^0 u_{i+1/2j}^{n+1} + g_{ij+1/2}^0 v_{ij+1/2}^{n+1}) h_1 h_2, \end{aligned}$$

причем

$$L_{2h}^{(1)} u_{i+1/2j}^n = (2\mu_{ij} u_{\bar{x}_1, i+1/2j}^n)_{z_1} + \hat{a}_{i+1/2j+1/2} (u_{\bar{x}_2, i+1/2j}^n + v_{\bar{x}_1, i+1/2j}^n)_{\bar{x}_2},$$

$$L_{2h}^{(2)} v_{ij+1/2}^n = (\hat{a}_{i+1/2j+1/2} (u_{\bar{x}_1, i+1/2j}^n + v_{\bar{x}_2, i+1/2j}^n))_{\bar{x}_1} + (2\mu_{ij} v_{ij+1/2, \bar{x}_2}^n)_{z_2}.$$

В суммах \sum_{ω_h} , \sum_{ω_h} и \sum_{ω_h} суммирование производится соответственно по индексам $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, M-1}$; $i = \overline{1, N-2}$, $j = \overline{1, M-1}$; $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, M-2}$

Оценим величины, входящие в соотношение (2.3.7). Учитывая уравнение (2.2.3), можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} & (\sum_{\omega_h} p_{z_1}^{n+1} u_{i+1/2j}^{n+1} + (\sum_{\omega_h} p_{z_2}^{n+1} v_{ij+1/2}^{n+1} h_1 h_2 = \\ & - \sum_{\omega_h} p_{ij}^{n+1} ((u_{\bar{x}_1, i+1/2j}^{n+1})_{\bar{x}_1} + (v_{\bar{x}_2, i+1/2j}^{n+1})_{\bar{x}_2}) h_1 h_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Произведя суммирование по частям, учитывая краевые условия (2.2.5) имеем

$$\begin{aligned} d_h &= 2 \sum_{\omega_h} \mu_{ij} u_{\bar{x}_1, i+1/2j}^n u_{\bar{x}_1, i+1/2j}^n h_1 h_2 + \\ & + \sum_{\omega_h} \hat{a}_{i+1/2j+1/2} (u_{\bar{x}_2, i+1/2j}^n + v_{\bar{x}_1, i+1/2j}^n) u_{\bar{x}_2}^{n+1} h_1 h_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\omega_h}^0 \hat{a}_{i+1/2, j+1/2} (u_{x_2, i+1/2, j}^n + v_{x_1, i, j+1/2}^n) v_{x_1, i, j+1/2}^{n+1} h_1 h_2 + \\
& + 2 \sum_{\omega_h} \mu_{ij} v_{x_2, i, j+1/2}^n v_{x_2, i, j+1/2}^{n+1} h_1 h_2
\end{aligned}$$

где в сумме \sum_{ω_h} суммирование производится по индексам $= \overline{0, N-1}$; $j = \overline{0, M-1}$.

Преобразуем величину d_h

$$\begin{aligned}
d_h &= \sum_{\omega_h} \left\{ \mu_{ij} [(u_{x_2, i+1/2, j}^n)^2 + (u_{x_1, i+1/2, j}^{n+1})^2 - ((u_{i+1/2, j}^{n+1} - u_{i+1/2, j}^n)_{x_1})^2] + \right. \\
& + \mu_{ij} [(v_{x_2, i, j+1/2}^n)^2 + (v_{x_2, i, j+1/2}^{n+1})^2 - ((v_{ij+1/2}^{n+1} - v_{ij+1/2}^n)_{x_2})^2] \left. \right\} h_1 h_2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\omega_h}^0 \hat{a}_{i+1/2, j+1/2} [(u_{x_2, i+1/2, j}^n + v_{x_1, i, j+1/2}^n)^2 + (u_{x_2, i+1/2, j}^{n+1} + v_{x_1, i, j+1/2}^{n+1})^2 - \\
& - ((u_{i+1/2, j}^{n+1} - u_{i+1/2, j}^n)_{x_2} + (v_{ij+1/2}^{n+1} - v_{ij+1/2}^n)_{x_1})^2] h_1 h_2
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
d_h &\geq \frac{\mu_0}{2} (\|\text{grad}_h u^n\|_{(1)}^2 + \|\text{grad}_h u^{n+1}\|_{(1)}^2 + \|\text{grad}_h v^n\|_{(2)}^2 + \|\text{grad}_h v^{n+1}\|_{(2)}^2 - \\
& - \frac{\mu_1}{2} (\|\text{grad}_h (u^{n+1} - u^n)\|_{(1)}^2 + \|\text{grad}_h (v^{n+1} - v^n)\|_{(2)}^2)
\end{aligned}$$

где

$$\|\text{grad}_h u\|_{(1)}^2 = \|u_{x_2}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|u_{x_1}\|_{L_2(\omega_h)}^2,$$

$$\|\text{grad}_h v\|_{(2)}^2 = \|v_{x_2}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|v_{x_1}\|_{L_2(\omega_h)}^2.$$

Итак, получили, что

$$\begin{aligned}
d_h &\geq \frac{\mu_0}{2} (\|\text{grad}_h u^n\|_{(1)}^2 + \|\text{grad}_h u^{n+1}\|_{(1)}^2 + \\
& + \|\text{grad}_h v^n\|_{(2)}^2 + \|\text{grad}_h v^{n+1}\|_{(2)}^2 - \\
& - \frac{\mu_1}{2} (\|\text{grad}_h (u^{n+1} - u^n)\|_{(1)}^2 + \|\text{grad}_h (v^{n+1} - v^n)\|_{(2)}^2)
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Теперь оценим слагаемое $2\tau(L_{1h} v^n, v^{n+1})$.

В силу доказанной леммы имеем

$$2\tau(L_{1h} v^n, v^{n+1}) = 2\tau^2(L_{1h} v^n, v^n).$$

$$\begin{aligned}
2\tau^2(L_{1h}\mathbf{v}^n, \mathbf{v}_i^n) = & \frac{\tau^2}{2} \sum_{\omega_h} [(u_{i+3/2j}^n + u_{i+1/2j}^n)(u_{i+1/2j}^n)_{z_1}(u_{i+1/2j}^n)_t + \\
& + (u_{i+1/2j}^n + u_{i-1/2j}^n)(u_{i+1/2j}^n)_{z_1}(u_{i+1/2j}^n)_t + \\
& + (v_{i+1,j+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)(u_{i+1/2j}^n)_{z_2}(u_{i+1/2j}^n)_t + \\
& + (v_{i+1,j-1/2}^n + v_{ij-1/2}^n)(u_{i+1/2j}^n)_{z_2}(u_{i+1/2j}^n)_t] h_1 h_2 + \\
& + \frac{\tau^2}{2} \sum_{\omega_h} [(u_{i+1/2j+1}^n + u_{i+1/2j}^n)(v_{ij+1/2}^n)_{z_1}(v_{ij+1/2}^n)_t + \\
& + (u_{i-1/2j+1}^n + u_{i-1/2j}^n)(v_{ij+1/2}^n)_{z_1}(v_{ij+1/2}^n)_t + \\
& + (v_{ij+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)(v_{ij+1/2}^n)_{z_2}(v_{ij+1/2}^n)_t + \\
& + (v_{ij+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)(v_{ij+1/2}^n)_{z_2}(v_{ij+1/2}^n)_t] h_1 h_2
\end{aligned}$$

Используем неравенство Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
|2\tau^2(L_{1h}\mathbf{v}^n, \mathbf{v}_i^n)| \leq & \frac{3\sqrt{2}\tau^2}{h} \left\{ \sum_{\omega_h} [(u_{i+1/2j}^n)^2 + (v_{ij+1/2}^n)^2]^2 h_1 h_2 \right\}^{1/2} \cdot \\
\|\mathbf{v}_i^n\| = & \frac{3\sqrt{2}\tau^2}{h} \|\mathbf{v}^n\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_i^n\|
\end{aligned}$$

Величина $\|\mathbf{v}^n\|^2$ оценивается так [6]

$$\|\mathbf{v}^n\|^2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{v}^n\| \cdot \|\text{grad}_h \mathbf{v}^n\|$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|2\tau^2(L_{1h}\mathbf{v}^n, \mathbf{v}_i^n)| \leq & \frac{9\tau^2}{h} \|\mathbf{v}^n\| \cdot \|\text{grad}_h \mathbf{v}^n\| \cdot \|\mathbf{v}_i^n\| \leq \\
\leq & \frac{\tau^2}{2} \|\mathbf{v}_i^n\|^2 + \frac{C_1^2}{2} \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \|\mathbf{v}^n\|^2 \cdot \|\text{grad}_h \mathbf{v}^n\|^2
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

где

$$C_1 = 6, \quad \|\text{grad}_h \mathbf{v}\|^2 = \|\text{grad}_h u\|_{(1)}^2 + \|\text{grad}_h v\|_{(2)}^2$$

Используя (2.3.9) и (2.3.10) имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{v}^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n\|^2 + (\tau\mu_0 - \frac{C_1^2}{2} \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \|\mathbf{v}^n\|^2) \cdot \\
\cdot \|\text{grad}_h \mathbf{v}^n\|^2 + \tau\mu_0 \|\text{grad}_h \mathbf{v}^{n+1}\|^2 \leq \\
\leq \tau\mu_1 \|\text{grad}_h(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n)\|^2 + 2\tau |(\mathbf{f}^n, \mathbf{v}^{n+1})|
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Используя неравенство

$$\|grad_h(v^{n+1} - v^n)\|^2 \leq \frac{8}{h^2} \|v^{n+1} - v^n\|^2$$

из (2.3.11) получим

$$\begin{aligned} & \|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{8\tau\mu_1}{h^2}\right) \cdot \|v^{n+1} - v^n\|^2 + \\ & + \tau\left(\mu_0 - \frac{C_1^2\tau}{2h^2} \|v^n\|^2\right) \cdot \|grad_h v^n\|^2 + \\ & + \tau\mu_0 \|grad_h v^{n+1}\|^2 \leq 2\tau \|\tilde{f}^n\| \cdot \|v^{n+1}\| \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Наложим на h , τ и μ_1 условие

$$\frac{1}{2} - \frac{8\tau}{h^2} \mu_1 \equiv \delta > 0 \quad (2.3.13)$$

Тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} & \|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2 + \tau\left(\mu_0 - \frac{C_1^2\tau}{2h^2} \|v^n\|^2\right) \cdot \|grad_h v^n\|^2 + \\ & + \tau\mu_0 \|grad_h v^{n+1}\|^2 \leq 2\tau \|\tilde{f}^n\| \cdot \|v^{n+1}\| \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

которое позволяет оценить $\|v^n\|$, $\|grad_h v^n\|$ если $\frac{\tau}{h^2}$ взять достаточно малым.

Действительно, до тех пор, пока коэффициент при неотрицателен, имеем

$$\begin{aligned} & \|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2 \leq 2\tau \|\tilde{f}^n\| \cdot \|v^{n+1}\|, \\ & (\|v^{n+1}\| - \|v^n\|) \cdot (\|v^{n+1}\| + \|v^n\|) \leq 2\tau \|\tilde{f}^n\| \cdot \|v^{n+1}\|, \\ & \|v^{n+1}\| \leq \|v^n\| + 2\tau \|\tilde{f}^n\|. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\|v^{n+1}\| \leq \|v^0\| + 2\tau \sum_{k=0}^n \|\tilde{f}^k\|. \quad (2.3.15)$$

Поэтому, если τ/h^2 подчинить еще условию

$$\mu_0 - \frac{C_1^2\tau}{2h^2} (\|v^0\|^2 + 2\tau \sum_{k=0}^{n-1} \|\tilde{f}^k\|)^2 \equiv \delta_1 > 0 \quad (2.3.16)$$

Тогда из (2.3.14) и (2.3.15) выведем оценку

$$\begin{aligned} & \|v^{n+1}\|^2 + \tau\delta_1 \sum_{k=0}^n \|\text{grad}_h v^k\|^2 + \tau\mu_0 \sum_{k=0}^n \|\text{grad}_h v^{k+1}\|^2 \leq \\ & \leq \|v^0\|^2 + 2\left(\tau \sum_{k=0}^n \|\bar{f}^k\|\right) \cdot (\|v^0\| + 2\tau \sum_{k=0}^n \|\bar{f}^k\|) \leq \quad (2.3.17) \\ & \leq 2\|v^0\|^2 + 5\left(\tau \sum_{k=0}^n \|\bar{f}^k\|\right)^2 \end{aligned}$$

А из (2.3.12) и (2.3.15) оценку

$$\begin{aligned} & \|v^{n+1}\|^2 + \delta \sum_{k=0}^n \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \tau\delta_1 \sum_{k=0}^n \|\text{grad}_h v^k\|^2 + \\ & + \tau\mu_0 \sum_{k=0}^n \|\text{grad}_h v^{k+1}\|^2 \leq \|v^0\|^2 + 5\left(\tau \sum_{k=0}^n \|\bar{f}^k\|\right)^2 \quad (2.3.18) \end{aligned}$$

Итак, при выполнении условий (2.3.13) и (2.3.16) верна оценка (2.3.18) правая часть которой не превосходит известной нам величины.

2.4 Исследование аппроксимационных свойств .

Руководствуясь общими соображениями теории аппроксимации разностных схем, легко убедиться в том, что указанная разностная схема по τ имеет первый порядок аппроксимации. Поэтому ограничимся приведением оценок погрешности аппроксимации для стационарного аналога рассматриваемой разностной схемы.

Предположим, что пространственная конечно-разностная сетка построена таким образом, чтобы линия разрыва совпадала с прямой $x_{h+1/2} = \xi$, где $1 \leq n \leq N - 2$.

При таком выборе координатной сетки, очевидно, что уравнение неразрывности аппроксимируется со вторым порядком точности по h всюду в $\omega_h (h = \max(h_1, h_2))$ и имеет место соотношение

$$\text{div}_h z = -\text{div}_h v_h = O(h^2) \quad (2.4.1)$$

где $z = v - v_h$ погрешность решения разностной и дифференциальной задачи для вектора скорости.

Вводя также сеточную функцию ошибки давления

$$\pi = p - p_h$$

для погрешности решения для стационарных уравнений соответствующих (2.2.1) следующее соотношение

$$\begin{aligned}
 L_h^{(1)} z^{(1)} &= \pi_{x_1, i j} - 2(\mu_{ij} z_{x_1, i+1/2 j}^{(1)})_{x_1} - (\bar{a}_{i+1/2 j+1/2}^0 (z_{x_2, i+1/2 j}^{(1)} + \\
 &\quad + z_{x_1, i j+1/2}^{(2)})_{x_2} + \bar{k}_{i+1/2 j}^0 z_{i+1/2 j}^{(1)} = -\psi_{i+1/2 j}^{(1)}, \\
 L_h^{(2)} z^{(2)} &= \pi_{x_2, i j} - (\bar{a}_{i+1/2 j+1/2}^0 (z_{x_2, i+1/2 j}^{(1)} + z_{x_1, i j+1/2}^{(2)}))_{x_1} - \\
 &\quad - 2(\mu_{ij} z_{x_2, i j+1/2}^{(2)})_{x_2} + \bar{k}_{i j+1/2}^0 z_{i j+1/2}^{(2)} = -\psi_{i j+1/2}^{(2)},
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

где $\psi_{i+1/2 j}^{(1)}$, $\psi_{i j+1/2}^{(2)}$ невязки конечно-разностных схем.

Пользуясь известной методикой [11] представим правые части выражений (2.4.2) в следующей форме

$$\begin{aligned}
 \psi_{i+1/2 j}^{(2)} &= \eta_{x_1, i+1/2 j}^{(1)} + \delta_{x_2, i+1/2 j}^{(1)} + \varphi_{i+1/2 j}^{(1)}, \\
 \psi_{i j+1/2}^{(2)} &= \eta_{x_1, i j+1/2}^{(2)} + \delta_{x_2, i j+1/2}^{(2)} + \varphi_{i j+1/2}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 \eta_{i+1/2 j}^{(1)} &= \int_{-0.5}^{0.5} [-p(x_{1i}, x_{2j} + sh_2) + 2\mu(x_{1i}, x_{2j} + sh_2) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{1i}, x_{2j} + sh_2) + \\
 &\quad + p(x_{1i}, x_{2j}) - 2\mu_{ij} u_{x_1, i+1/2 j}] ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{i+1/2 j}^{(1)} &= \int_{-0.5}^{0.5} [\mu(x_{1, i+1/2} + sh_1, x_{2j+1/2}) \left(\frac{\partial u(x_{1, i+1/2} + sh_1, x_{2j+1/2})}{\partial x_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial v(x_{1, i+1/2} + sh_1, x_{2j+1/2})}{\partial x_1} \right) - \bar{a}_{i+1/2 j+1/2}^0 (u_{x_2, i+1/2 j} + v_{x_1, i j+1/2})] ds,
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{i+1/2 j}^{(1)} = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [-k(x_{1, i+1/2} + sh_1, x_{2j} + th_2)$$

$$(u(x_{1, i+1/2} + sh_1, x_{2j} + th_2) - u(x_{1, i+1/2}, x_{2j}))] ds dt,$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i j+1/2}^{(2)} &= \int_{-0.5}^{0.5} [\mu(x_{1, i+1/2}, x_{2j+1/2} + sh_2) \left(\frac{\partial u(x_{2j+1/2} + sh_2, x_{1, i+1/2})}{\partial x_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial v(x_{2j+1/2} + sh_2, x_{1, i+1/2})}{\partial x_1} \right) - \bar{a}_{i+1/2 j+1/2}^0 (u_{x_2, i+1/2 j} + v_{x_1, i j+1/2})] ds,
 \end{aligned}$$

$$\delta_{ij+1/2}^{(2)} = \int_{-0.5}^{0.5} [-p(x_{1i} + sh_1, x_{2j}) + 2\mu(x_{1i} + sh_1, x_{2j}) \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_{1i} + sh_1, x_{2j}) + p(x_{1i}, x_{2j}) - 2\mu(x_{1i}, x_{2j})v_{\bar{x}_2, ij+1/2}] ds,$$

$$\varphi_{ij+1/2}^{(2)} = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [-k(x_{1i} + sh_1, x_{2j+1/2} + th_2)(v(x_{1i} + sh_1, x_{2j+1/2} + th_2) - v(x_{1i}, x_{2j+1/2}))] ds dt.$$

Разлагая в ряды Тейлора, убеждаемся в том, что $\delta_{ij+1/2}^{(2)}$, $\varphi_{ij+1/2}^{(2)}$, $\eta_{i+1/2j}^{(1)}$ имеют порядок малости $O(h^2)$, так как вычисления этих величин производятся в области, где коэффициенты и следовательно, решения задачи гладкие.

Рассуждая аналогичным образом, легко показать, что $\delta_{i+1/2j}^{(1)}$, $\varphi_{i+1/2j}^{(1)}$, $\eta_{ij+1/2}^{(2)}$ также имеют второй порядок аппроксимации при $i \neq n$.

Оценим выражения $\varphi_{n+1/2j}^{(1)}$, $\delta_{n+1/2j}^{(1)}$. Воспользуемся разложениями в окрестности $x_{1, n+1/2} = \xi$

$$u(\xi + sh_1, x_{2j} + th_2) = u(\xi, x_{2j}) + O(h),$$

при любых $t, s \in [-0.5; 0.5]$

Следовательно, $\varphi_{n+1/2j}^{(1)} = O(h)$

Рассмотрим коэффициент

$$a_{n+1/2, j+1/2}^0 = \frac{1}{h_2} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} \frac{dx_2}{\frac{1}{h_1} \int_{x_{1n}}^{x_{1n+1}} \mu(x_1, x_2)}$$

Имеет место следующее представление

$$a_{n+1/2, j+1/2}^0 = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{dt}{\int_{-0.5}^{0.5} \mu(x_{1, n+1/2} + th_1, x_{2j} + th_2)}$$

Обозначим

$$\left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1 = \xi \pm 0} = \omega_0.$$

Далее проведем следующие вычисления

$$\int_{-0.5}^{0.5} \frac{dt}{\mu(x_{1, n+1/2} + th, x_2)} = \int_{-0.5}^0 \frac{dt}{\mu(x_{1, n+1/2} + th_1, x_2)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{0.5} \frac{dt}{\mu(x_{1,n+1/2} + th_1, x_2)} = \int_{-0.5}^0 \left[\frac{1}{\mu(\xi - 0, x_2)} + th_1 \left(\frac{1}{\mu(x_1, x_2)} \right)'_{x_1=\xi-0} + \right. \\
& \quad \left. + O(h_1^2) \right] dt + \int_0^{0.5} \left[\frac{1}{\mu(\xi + 0, x_2)} + th_1 \left(\frac{1}{\mu(x_1, x_2)} \right)'_{x_1=\xi+0} + \right. \\
& \quad \left. + O(h_1^2) \right] dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu(\xi + 0, x_2)} + \frac{1}{\mu(\xi - 0, x_2)} \right] + O(h_1), \\
& \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1=x_{1,n+1/2} + sh_1} = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1=x_{1,n+1/2} \pm 0} \pm \\
& \quad \pm sh_1 \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1=x_{1,n+1/2} \pm 0} + O(h_1^2) = \omega_0 + O(h_1), \\
& u_{x_{1,n+1/2}+1/2} + v_{x_{1,n+1/2}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi+0} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi-0} \right] + O(h)
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом условия сопряжения

$$a_{n+1/2, j+1/2} (u_{x_{1,n+1/2} j} + v_{x_{1,n+1/2} j}) = \omega_0 + O(h_1)$$

Итак, мы показали, что $\delta_{n+1/2 j}^{(1)} = O(h)$, т.е. в точке $x_1 = x_{1,n+1/2} = \xi$ имеет первый порядок аппроксимации.

Аналогичным образом покажем, что $\eta_{n, j+1/2}^{(2)} = O(h)$

$$v_{x_{1,n+1/2} j} = (v_{n+1, j+1/2} - v_{n, j+1/2}) / h_1$$

Разложим в ряд Тейлора

$$v_{n+1, j+1/2} = v_{\xi+0, j+1/2} + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{\xi+0, j+1/2} + O(h_1^2),$$

$$v_{n, j+1/2} = v_{\xi-0, j+1/2} + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{\xi-0, j+1/2} + O(h_1^2).$$

Отсюда получим, что

$$v_{x_{1,n+1/2} j} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi+0} + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi-0} \right) + O(h_1) \quad (2.4.4)$$

Аналогично получается, что

$$u_{x_{1,n+1/2} j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)_{x_1=\xi+0} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)_{x_1=\xi-0} \right) + O(h_1) \quad (2.4.5)$$

Из (2.4.4) и (2.4.5) имеем

$$u_{x_1, n+1/2, j+1/2} + v_{x_1, n, j+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi+0} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi-0} \right] + O(h)$$

С учетом условия сопряжения имеем

$$\begin{aligned} \omega_0 - \bar{a}_{n+1/2, j+1/2} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi+0} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{x_1=\xi-0} \right) \right] + O(h) = \\ = \omega_0 - \frac{1}{\frac{1}{\mu(\xi-0, x_2)} + \frac{1}{\mu(\xi+0, x_2)}} \left(\frac{\omega_0}{\mu(\xi-0, x_2)} + \frac{\omega_0}{\mu(\xi+0, x_2)} \right) + O(h_1) = O(h) \end{aligned}$$

2.5 Сходимость конечно-разностной задачи

Для исследования сходимости решения конечно-разностной задачи к решению дифференциальной задачи рассмотрим конечно-разностные соотношения для погрешности решения в следующей форме

$$\begin{aligned} & (\omega_{i+1/2, j}^{(1)n+1})_{\bar{i}} + \frac{1}{4} ((\omega_{i+1/2, j}^{(1)n} + \omega_{i-1/2, j}^{(1)n})^2)_{x_1} + \\ & + \frac{1}{2} ((\omega_{i+1/2, j}^{(1)n} + \omega_{i-1/2, j}^{(1)n}) \cdot (u_{i+1/2, j}^n + u_{i-1/2, j}^n))_{x_1} + \\ & + \frac{1}{4} ((\omega_{i+1, j+1/2}^{(2)n} + \omega_{i, j+1/2}^{(2)n}) \cdot (\omega_{i+1/2, j+1}^{(1)n} + \omega_{i+1/2, j}^{(1)n}))_{x_2} + \\ & + \frac{1}{4} ((v_{i+1, j+1/2}^n + v_{i, j+1/2}^n) \cdot (\omega_{i+1/2, j+1}^{(1)n} + \omega_{i+1/2, j}^{(1)n}) + (\omega_{i+1, j+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij+1/2}^{(2)n}) \\ & \cdot (u_{i+1/2, j+1}^n + u_{i+1/2, j}^n))_{x_2} + \pi_{x_1, ij}^{n+1} = 2(\mu_{ij} \omega_{\bar{x}_1, i+1/2, j}^{(1)n} \\ & + (\bar{a}_{i+1/2, j+1/2} (\omega_{x_2, i+1/2, j}^{(1)n} + \omega_{x_1, ij+1/2}^{(2)n}))_{x_2} - \psi_{i+1/2, j}^{(1)} - \bar{\psi}_{i+1/2, j}^{(1)} \\ & (\omega_{ij+1/2}^{(2)n+1})_{\bar{i}} + \frac{1}{4} ((\omega_{i+1/2, j+1}^{(1)n} + \omega_{i+1/2, j}^{(1)n}) (\omega_{i+1, j+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij+1/2}^{(2)n}))_{\bar{x}_1} + \quad (2.5.1) \\ & + \frac{1}{4} ((u_{i+1/2, j+1}^n + u_{i+1/2, j}^n) (\omega_{i+1, j+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij+1/2}^{(2)n}) + (v_{i+1, j+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n) \\ & (\omega_{i+1/2, j+1}^{(1)n} + \omega_{i+1/2, j}^{(1)n}))_{x_1} + \frac{1}{4} ((\omega_{ij+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij-1/2}^{(2)n})^2)_{x_2} \\ & + \frac{1}{2} ((\omega_{ij-1/2}^{(2)n} + \omega_{ij-1/2}^{(2)n}) (v_{ij+1/2}^n + v_{ij-1/2}^n))_{x_2} + \\ & + \pi_{x_2, ij}^{n+1} = 2(\mu_{ij} \omega_{x_2, ij+1/2}^{(2)n} + \end{aligned}$$

$$+(\bar{a}_{i+1/2j+1/2}^0 (\omega_{x_2, i+1/2j}^{(1)n} + \omega_{x_1, ij+1/2}^{(2)n})) \bar{x}_1 - \bar{\psi}_{ij+1/2}^{(2)} - \bar{\psi}_{ij+1/2}^{(1)}$$

Предположим, что

$$div_h \bar{\omega}_h^{n+1} = 0, \quad \bar{\omega}_h^{n+1}|_{\Gamma_h} = 0, \quad \bar{\omega}_h^0 = 0 \quad (2.5.2)$$

где $\bar{\psi}_{i+1/2, j}^{(1)}$, $\bar{\psi}_{ij+1/2}^{(2)}$ -погрешность аппроксимации нелинейных слагаемых и имеют порядок $O(h^2)$.

Умножая первое из уравнений (2.5.1) на $2\tau\omega_{i+1/2j}^{(1)n+1}h_1h_2$, второе на $2\tau\omega_{ij+1/2}^{(2)n+1}h_1h_2$ и рассуждая аналогично как при выводе оценок (2.3.17) имеем

$$\begin{aligned} & \|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\omega}^n\|^2 + \tau(\mu_0 - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\tau}{h^2} \|\bar{\omega}^n\|^2) grad_h \bar{\omega}^n \|^2 + \\ & + \tau\mu_0 \|grad_h \bar{\omega}^{n+1}\|^2 + \tau j_4^n \leq 2\tau(\psi + \bar{\psi}, \bar{\omega}^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

где

$$\begin{aligned} j_4^n = & \frac{1}{2} \sum_{\omega_h} [(\omega_{i+1/2j}^{(1)n} + \omega_{i-1/2j}^{(1)n})(u_{i+1/2j}^n + u_{i-1/2j}^n)]_{x_1} \omega_{i+1/2j}^{(1)n+1} h_1 h_2 + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\omega_h} [(v_{i+1, j+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)(\omega_{i+1/2j+1}^{(1)n} + \omega_{i+1/2j}^{(1)n}) + \\ & + (\omega_{i+1, j+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij+1/2}^{(2)n})(u_{i+1/2j+1}^n + u_{i+1/2j}^n)]_{x_2} \omega_{i+1/2j}^{(1)n+1} h_1 h_2 + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\omega_h} [(u_{i+1/2, j+1}^n + u_{i+1/2j}^n)(\omega_{i+1, j+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij+1/2}^{(2)n}) + \\ & + (v_{i+1, j+1/2}^n + v_{ij+1/2}^n)(\omega_{i+1/2, j+1}^{(1)n} + \omega_{i+1/2j}^{(1)n})]_{x_1} \omega_{ij+1/2}^{(2)n+1} h_1 h_2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\omega_h} [(\omega_{ij+1/2}^{(2)n} + \omega_{ij-1/2}^{(2)n})(v_{ij+1/2}^n + v_{ij-1/2}^n)]_{x_2} \omega_{ij+1/2}^{(2)n+1} h_1 h_2 \end{aligned}$$

Используя формулы суммирования по частям и неравенство Гельдера имеем

$$\begin{aligned} |j_4^n| \leq & 2\|\omega_{x_1, i+1/2j}^{(1)n+1}\| \cdot \|\omega_{i+1/2j}^{(1)n}\|_{L_4} \cdot \|u_{i+1/2j}^n\|_{L_4} + \|\omega_{x_2, j+1/2j}^{(1)n+1}\| \cdot \\ & \cdot \|\omega_{i+1/2j}^{(1)n}\|_{L_4} \cdot \|v_{ij+1/2}^n\|_{L_4} + \|\omega_{x_2, i+1/2j}^{(1)n+1}\| \cdot \|\omega_{ij+1/2}^{(2)n}\|_{L_4} \cdot \|u_{i+1/2j}^n\|_{L_4} + \\ & + \|\omega_{x_1, ij+1/2}^{(2)n+1}\| \cdot \|\omega_{ij+1/2}^{(2)n}\|_{L_4} \cdot \|u_{i+1/2j}^n\|_{L_4} + \|\omega_{x_1, j+1/2j}^{(2)n+1}\| \cdot \\ & \cdot \|\omega_{i+1/2j}^{(1)n}\|_{L_4} \cdot \|v_{ij+1/2}^n\|_{L_4} + 2\|\omega_{x_2, j+1/2j}^{(2)n+1}\| \cdot \|\omega_{ij+1/2}^{(2)n}\|_{L_4} \cdot \|v_{ij+1/2}^n\|_{L_4} \end{aligned}$$

Далее, используя неравенство

$$\|v\|_{L_4} \leq \sqrt[4]{2} \|v\|^{1/2} \|\operatorname{grad}_h v\|^{1/2}$$

и ε -неравенство и ограниченность v оценим j_4^n следующим образом

$$|j_4^n| \leq \varepsilon_3 (\|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^{n+1}\|^2 + 2\|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^n\|^2) + \frac{1}{\varepsilon_3} \|\operatorname{grad}_h v^n\|^2 \cdot \|\bar{\omega}^n\|^2$$

В силу ограниченности $\|\operatorname{grad}_h v^n\|$ имеем

$$|j_4^n| \leq \varepsilon_3 (\|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^{n+1}\|^2 + 2\|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^n\|^2) + C_2 \|\bar{\omega}^n\|^2 \quad (2.5.4)$$

Из (2.5.3), (2.5.4) получим неравенство

$$\begin{aligned} \|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\omega}^n\|^2 + \tau(\mu_0 - \frac{C_1^2}{2} \frac{\tau}{h_2} \|\bar{\omega}^n\|^2 - 2\varepsilon_3) \cdot \|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^n\|^2 + \\ + \tau(\mu_0 - \varepsilon_3) \cdot \|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^{n+1}\|^2 \leq 2\tau |(\psi + \tilde{\psi}, \bar{\omega}^{n+1})| + C_2 \tau \|\bar{\omega}^n\|^2 \end{aligned}$$

Поступая аналогично как при получении оценки для линейной задачи имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\omega}^n\|^2 + \tau(\mu_0 - \frac{C_1^2}{2} \frac{\tau}{h_2} \|\bar{\omega}^n\|^2 - 2\varepsilon_3) \cdot \|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^n\|^2 + \\ + \tau(\mu_0 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3) \cdot \|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^{n+1}\|^2 \leq 2\tau |(\psi, \bar{\omega}^{n+1})| + C_2 \tau \|\bar{\omega}^n\|^2 + \tau j_5^n \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

где j_5^n величина порядка $O(h^4)$.

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\omega}^n\|^2 + \tau(\mu_0 - \frac{C_1^2}{2} \frac{\tau}{h_2} \|\bar{\omega}^n\|^2 - 2\varepsilon_3) \cdot \\ \|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^n\|^2 + \tau(\mu_0 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3) \cdot \|\operatorname{grad}_h \bar{\omega}^{n+1}\|^2 \leq \\ \leq C_2 \tau (\|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 + \|\bar{\omega}^n\|^2) + \tau j_5^n + \tau \|\tilde{\psi}\|^2 \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Выбросим из левой части третье и четвертое слагаемое и полученное неравенство просуммируем по l от $l = 0$ до $l = n$

$$\|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 \leq \|\bar{\omega}^0\|^2 + 2C_2 \tau \sum_{l=0}^n \|\bar{\omega}^{l+1}\|^2 + \tau \sum_{l=0}^n (j_5^l + \|\tilde{\psi}\|^2)$$

Из этого неравенство, используя лемму Гронуолла, получим

$$\|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 \leq C_3 (\|\bar{\omega}^0\|^2 + j_6^n)$$

где

$$C_3 = \exp(2C_2T), \quad j_6^n = \sum_{m=0}^n (j_5^m + \|\bar{\psi}\|^2) \cdot \{\exp(-2C_2 \sum_{k=0}^m \tau)\} \tau$$

После этого, возвратившись к (2.5.6) τ/h_2 подчиним еще условию

$$\mu_0 - C \frac{\tau}{h^2} j_6^n - 2\epsilon_3 \equiv \delta > 0 \quad (2.5.7)$$

где $C = C_1^2 C_3/2$, то из (2.5.6) выведем оценку

$$\|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 + \tau \delta_1 \sum_{l=0}^n \|\text{grad}_h \bar{\omega}^l\|^2 + \tau \delta_3 \sum_{l=0}^n \|\text{grad}_h \bar{\omega}^{l+1}\|^2 \leq C_4 j_7^n \quad (2.5.8)$$

где j_7^n величина порядка $O(\tau^2 + h^4)$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 Пусть выполнены условия $\tau \mu_1/h^2 \leq 1/16$, $\mu \neq \frac{C\tau}{h^2} + \epsilon$, а для решения задачи (3.1.1)-(3.1.3) выполнены условия (3.1.4), а тогда решение наилучшей схемы (3.1.5)-(3.1.9) устойчиво и сходится к решению задачи (3.1.1)-(3.1.3) со скоростью, определяемой неравенством

$$\begin{aligned} & \|\bar{\omega}^{n+1}\|^2 + \tau \delta_1 \sum_{l=0}^n \|\nabla_h \bar{\omega}^l\|^2 + \\ & + \tau \delta_3 \sum_{l=0}^n \|\nabla_h \bar{\omega}^{l+1}\|^2 \leq C(\tau + h^n) \end{aligned}$$

2.6 Схема реализации метода расщепления

Предложена новая схема реализации метода расщепления (2.2.7). Для численной реализации алгоритма, после нахождения вспомогательных величин $\mathbf{v}^{n+1/2}$ которые описывают вихревые характеристики течения, введем сеточную функцию тока $\psi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}$, для которой

$$u_{i+1/2, j}^{n+1} = \psi_{z_i, i+1/2, j+1/2}^{n+1}, \quad v_{i, j+1/2}^{n+1} = -\psi_{z_i, i+1/2, j+1/2}^{n+1} \quad (2.6.1)$$

Из соотношения

$$(1 + \tau k) \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1/2} - \nabla_h p^{n+1} \quad (2.6.2)$$

с учетом (2.2.3) получим разностное уравнение

$$\text{rot}_h((1 + \tau k) \mathbf{v}^{n+1}) = \text{rot}_h \mathbf{v}^{n+1/2}$$

Следовательно, для определения функции тока во внутренних узлах сетки $\Omega)h$ с учетом равенств (2.6.1) имеем уравнение

$$\operatorname{div}_h((1 + \tau k)\nabla_h \psi^{n+1}) = \operatorname{rot}_h \mathbf{v}^{n+1/2} \quad (2.6.3)$$

которое на каждом временном шаге решается известными итерационными методами при фиксированных значениях ψ^{n+1} на границе расчетной области.

Давление можно найти по известному решению для скорости и вспомогательных величин $\mathbf{v}^{n+1/2}$.

Поле давления вычисляется из следующего соотношения:

$$\begin{aligned} p_{x_1,ij}^{n+1} &= u_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (1 + \tau k_{i+1/2,j}) u_{i+1/2,j}^{n+1}, \\ p_{x_2,ij}^{n+1} &= v_{ij+1/2}^{n+1/2} - (1 + \tau k_{ij+1/2}) v_{ij+1/2}^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

2.7 Численный аналог альтернирующего метода Шварца.

Внутренние итерации для нахождения поля функции тока из уравнения (2.6.3) проводятся методом разделения области. Для решения эллиптических разностных уравнений, с сильно меняющимися в узких областях коэффициентом $k(x, y)$ при старшей производной эффективно использовать численный аналог альтернирующего метода Шварца. В работе [73] на примере модельной задачи показано и получена асимптотические числа арифметических действий необходимых для решения задачи с точностью ϵ . В прямоугольнике

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\} \quad (2.7.1)$$

рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} L\psi &= \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \\ \psi(0, y) &= \varphi_1(y), \quad \psi(l_1, y) = \varphi_2(y), \quad y \in (0, l_2), \\ \psi(x, 0) &= \theta_1(x), \quad \psi(x, l_2) = \theta_2(x), \quad x \in (0, l_1) \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Предполагаем, что $c(x, y) \geq c > 0$. На множестве \bar{D} введем равномерную сетку с шагами $h_x = l_1/N_1, h_y = l_2/N_2$. На этой сетке построим разностную схему

$$\begin{aligned}(L_h \psi)_{i,j} &= f_{i,j}, \quad 0 < i < N_1, \quad 0 < j < N_2, \\ \psi_{0,j} &= (\varphi_1)_j, \quad \psi_{N_1,j} = (\varphi_2)_j, \quad 0 \leq j \leq N_2, \\ \psi_{i,0} &= (\theta_1)_i, \quad \psi_{i,N_2} = (\theta_2)_i, \quad 0 \leq i \leq N_1\end{aligned}\quad (2.7.3)$$

где L_h - пятиточечная разностная аппроксимация оператора L . Введем обозначения

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x, y) : 0 < x < \gamma_2, \quad 0 < y < l_2\}, \\ D_2 &= \{(x, y) : \gamma_2 < x < \gamma_3, \quad 0 < y < l_2\}, \\ D_3 &= \{(x, y) : \gamma_3 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2\}, \\ D_4 &= \{(x, y) : \gamma_1 < x < \gamma_4, \quad 0 < y < l_2\},\end{aligned}$$

Предположим, что

$$C(x, y) = \begin{cases} C_1 = \text{const}, & \text{если } (x, y) \in D_1 \\ C_2(x, y), & \text{если } (x, y) \in D_2 \\ C_3 = \text{const}, & \text{если } (x, y) \in D_3 \end{cases}\quad (2.7.4)$$

значения $m = 1, 2, 3, 4$ попадают в узлы сетки с номерами i_m и $(\gamma_4 - \gamma_1) \leq l_1$. Определим последовательности ψ_1^n и ψ_2^n следующим образом:

$$(L_h \psi_1^n)_{i,j} = f_{i,j}, \quad 0 < i < i_2, \quad i_3 < i < N_1, \quad 0 < j < N_2 \quad (2.7.5)$$

$$(\psi_1^n)_{0,j} = (\varphi_1)_j, \quad (\psi_1^n)_{N_1,j} = (\varphi_2)_j, \quad 0 \leq j \leq N_2 \quad (2.7.6)$$

$$(\psi_1^n)_{i_2,j} = (\psi_2^{n-1})_{i_2,j}, \quad (\psi_1^n)_{i_3,j} = (\psi_2^{n-1})_{i_3,j}, \quad 0 \leq j \leq N_2 \quad (2.7.7)$$

$$(\psi_1^n)_{i_1,0} = (\theta_1)_{i_1}, \quad (\psi_1^n)_{i_2,N_2} = (\theta_2)_{i_2}, \quad 0 < i < i_2, \quad i_3 < i < N_1, \quad (2.7.8)$$

$$(L_h \psi_2^n)_{i,j} = f_{i,j}, \quad i_1 < i < i_4, \quad 0 < j < N_2 \quad (2.7.9)$$

$$(\psi_2^n)_{i_1,j} = (\varphi_1)_{i_1,j}, \quad (\psi_2^n)_{i_4,j} = (\varphi_2)_{i_4,j}, \quad 0 \leq j \leq N_2 \quad (2.7.10)$$

$$(\psi_2^n)_{i_1,0} = (\theta_1)_{i_1}, \quad (\psi_2^n)_{i_2,N_2} = (\theta_2)_{i_2}, \quad 0 < i < i_4, \quad (2.7.11)$$

$n = 1, 2, 3, 4, \dots, \psi_2^0$ - заданное начальное приближение. Таким образом ψ_1^n определена как решение разностной краевой задачи (2.7.5) в области $D_1 \cup D_3$ с краевыми условиями (2.7.6)-(2.7.8), а ψ_2^n -

как решение разностной краевой задачи (2.7.9) в области D_4 , с краевыми условиями (2.7.10), (2.7.11). Итерационный метод (2.7.5)–(2.7.11) является численным аналогом известного метода Шварца. Для определения зависимости скорости сходимости численного аналога альтернирующего метода Шварца решена тестовая задача. Рассматривался квадрат $\pi \times \pi$, $\gamma_2 = 9\pi/20$, $\gamma_3 = 11\pi/20$. В формуле (2.7.4)

$$C_1 = 5 \cdot 10^{-3}, C_3 = 10^{-2}, C_2(x, y) = C \cdot \exp[-4(y - 0,5\pi)^2]$$

Краевые условия

$$\psi(0, y) = 0, \quad \psi(l_1, y) = 0, \quad y \in [0, l_2]$$

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, l_2)}{\partial y} = 0, \quad x \in (0, l_1) \quad (2.7.12)$$

Очевидно, что функция $\psi = 0$ является решением такой задачи. В качестве начального приближения была выбрана функция

$$\begin{aligned} \psi_2^0(x, y) = & \sin x \cdot \sin y + \sin 39x \cdot \sin 39y + \\ & + \sin 20x \cdot \sin 20y + \sin x \cdot \sin 20y + \sin 39x \cdot \sin 39y. \end{aligned}$$

Число узлов по каждому направлению $N = 41$. Для решения этой задачи γ_1 и γ_2 были выбраны равными $6\pi/20$ и $14\pi/20$ соответственно, т. е. область D_4 содержала 17×41 узлов. Функция ψ_1^n определялась методом верхней релаксации в областях D_1 и D_2 с итерационным параметром $\omega = 2/(1 + \sin h)$. Функция ψ_2^n определялась методом матричной прогонки. Вычисления заканчивались, когда

$$\max(\|\psi_1^n\|_C, \|\psi_2^n\|_C) < 10^{-5}.$$

Для сравнения эта же задача решалась методом верхней релаксации. Результаты показывают, что количества итерации в методе Шварца при $C = 9, C = 81, C = 729$ оставались равным $n = 18$, а методом верхней релаксации с ростом значения коэффициента C количество итерации значительно увеличивается. Все расчеты показывают эффективность метода Шварца при больших значениях C .

2.8 Численные результаты течения вязкой несжимаемой жидкости в пористых средах.

Изучение течения жидкости через пористые среды представляет очень большой практический интерес. Течения вязкой несжимаемой жидкости описывается нелинейными уравнениями Навье-Стокса. Характерным для таких задач является присутствие в уравнении движения жидкости члена с быстроменяющимися коэффициентами. При течении жидкости через пористую среду формируется неоднородность профиля скорости с максимумом вблизи твердой стенки. Поэтому необходимо разрабатывать эффективные итерационные методы для численного решения уравнений описывающих такие течения. Известно, что $k(x)$ является функцией сильно меняющейся в области Ω . В связи с этим эффективность известных итерационных методов для решения эллиптических уравнений, за исключением попеременно-треугольного метода, существенно снижается. В данной работе проведены численные расчеты течения жидкости в плоском канале Ω через пористую вставку описываемые уравнениями (3.1.1), (3.1.2)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} - k(x) \mathbf{v}, \quad (2.8.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

где Re - число Рейнольдса, $\mathbf{v} = (u, v)$ - скорость жидкости, p - давление, $k(x)$ - коэффициент проницаемости пористой среды.

Системе уравнений (2.8.1) поставим граничные условия

$$u = u_0(x_2), \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \{x_1 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2\},$$

$$u = v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 = \{0 \leq x_1 \leq l_1, \quad x_2 = l_2\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3 = \{x_1 = l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \quad (2.8.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_4 = \{0 \leq x_1 \leq l_1, \quad x_2 = 0\}$$

Коэффициент $k(x)$ определяется следующим образом [115]

$$k(x) = \begin{cases} \frac{150(1-\epsilon)^2}{Re \epsilon^3} \left(\frac{D_{pn}}{d}\right)^2, & x \in \Omega_n, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_n. \end{cases}$$

где ε -коэффициент порозности, D_{app} -диаметр аппарата, d -диаметр зерен, Ω_n -подобласть занятая пористой средой.

Задача (2.8.1),(2.8.2) численно решена предлагаемой в 2.6 схемой расщепления по физическим процессам. Эллиптическое уравнение (2.6.3) с соответствующими к (2.8.2) граничными условиями

$$\begin{aligned}\psi_{1/2,j+1/2} &= g(x_{2,j+1/2}), 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ \psi_{i+1/2,N_2-1/2}^{n+1} &= const, 1 \leq i \leq N_1 - 1 \\ \psi_{N_1+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \psi_{N_1-1/2,j+1/2}^{n+1}, 1 \leq j \leq N_2 - 1,\end{aligned}$$

где

$$g(x_2) = \int_0^{x_2} U_0(y) dy,$$

решается численным аналогом метода Шварца. Расчетная область имела размеры $l_1 = 2$, $l_2 = 0,5$ и покрывалась сеткой 81×41 . Численные расчеты проведены в широком диапазоне чисел Рейнольдса и коэффициента проницаемости пористой среды. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков 1-6. На рисунках 2,3 приведены профили компоненты скорости внутри пористой среды и за пористой среды. Из графиков видно, что за пористой перегородкой имеют место значительные неоднородности. На рисунке 4 изображен профиль скорости на выходе из канала которой близко течению Пуазейля в плоском канале. На рисунках 5,6 приведены изолинии функции тока для $Re = 100$ и $Re = 500$. Численные расчеты проводились до тех пор, пока

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq N_1 \\ 1 \leq j \leq N_2}} |u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = 10^{-3}. \quad (2.8.3)$$

Для сравнения эллиптическая часть этой задачи решалась методом верхней релаксации. Результаты показывают что при использовании альтернирующего метода Шварца количество внешних итерации меньше чем в методе верхней релаксации. Например, при $Re = 100$, количество внутренних итерации для достижения требуемой точности вида (2.8.2) методом верхней релаксации 130, а методом Шварца 19. С увеличением значения коэффициента в задаче (2.1.1),(2.1.2) количество внешних итерации в методе Шварца мало меняется.

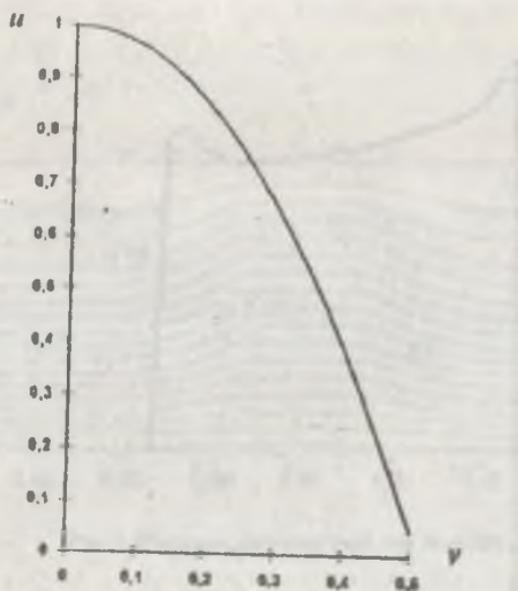


Рис. 1. Профиль скорости M на входе

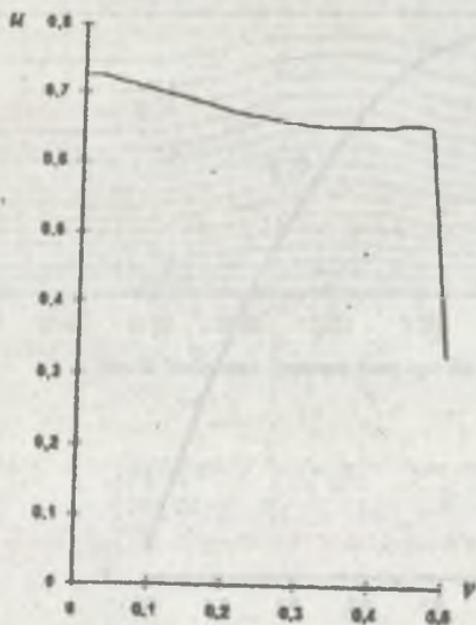


Рис. 2. Профиль скорости M внутри пористой вставки

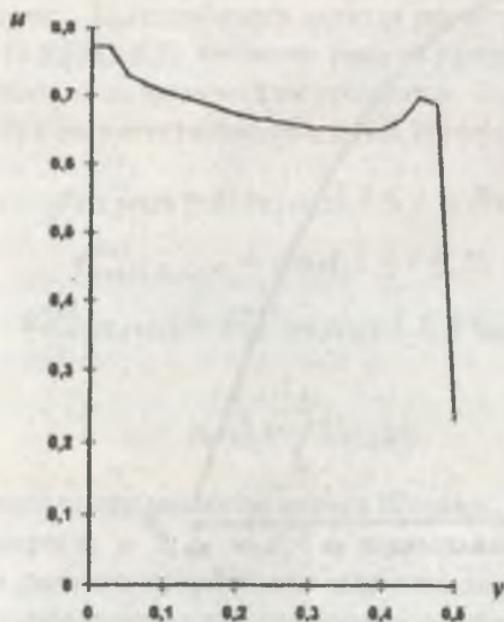


Рис. 3. Профиль скорости m за пористой вставкой

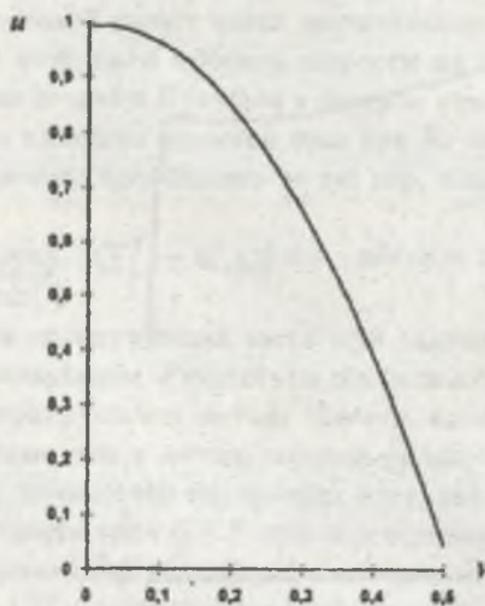


Рис. 4. Профиль скорости m на выходе

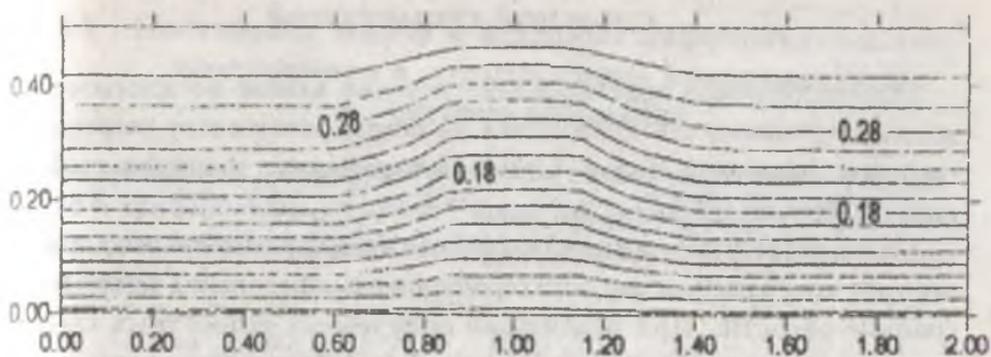


Рис. 5. Изолинии функции тока при $Re = 100$

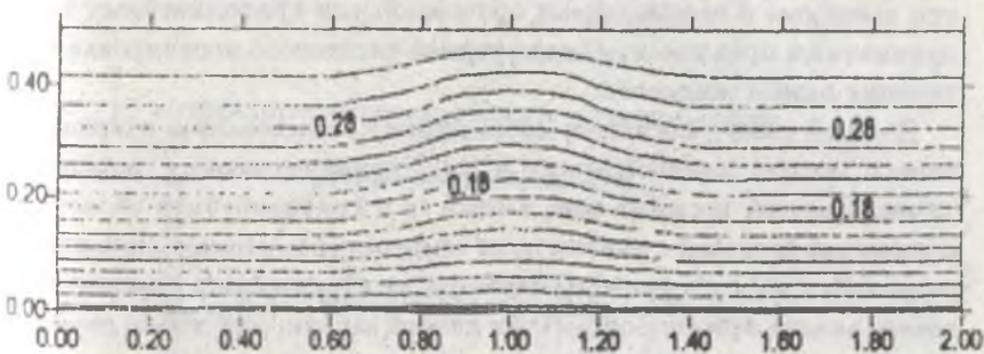


Рис. 6. Изолинии функции тока при $Re = 500$

3. Тепло-массообмен течения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости через пористую среду в областях со сложной геометрией

Математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости чаще всего проводится на основе численного решения системы уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока-вихрь скорости [127].

В работе [142] построена трехслойная схема переменных направлений, предложен метод безитерационного определения вихря на границе области. При реализации полученных разностных схем ограничение на временной шаг могут быть обусловлены лишь нелинейностью задачи.

Большие возможности, по крайней мере, в части автоматизации программирования, при численном исследовании течений вязкой несжимаемой жидкости в нерегулярных областях представляет метод решения в произвольных ортогональных криволинейных координатах. В работе [145] уравнения движения вязкой жидкости записаны в произвольных ортогональных криволинейных координатах и предложена одна методика численного моделирования течения вязкой жидкости.

Данный раздел посвящен дальнейшему исследованию итерационного метода, предложенного в [142] применительно к задачам течения вязкой несжимаемой жидкости в криволинейной области с пористой вставкой с учетом поля температуры. Применение итерационных методов решения системы алгебраических уравнений, возникающих при аппроксимации данной задачи, осложнено двумя трудностями, основная из них связана с отрицательным влиянием коэффициента проницаемости пористой среды на обусловленность системы. Вторая - с заданием граничного условия для вихря скорости, которое отсутствует в исходной дифференциальной задаче. Для преодоления основной трудности численное решение находится с помощью трехслойной схемы переменных направлений, предложенной в [142]. В отличие от [142] значения вихря на твердой стенке находится по формуле Тома с релаксацией на полном итерационном шаге. Численными расчетами показано, что необходимое

количество итераций для сходимости к решению исходной задачи мало зависит от разброса значения коэффициента проницаемости пористой среды.

3.1 Постановка задачи и исходные дифференциальные соотношения в ортогональной криволинейной системе координат

Для описания стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в криволинейных трубах с пористой вставкой (рис. 7) уравнения Навье-Стокса в переменных (ψ, ω) могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial u\omega}{\partial x} + \frac{\partial v\omega}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left(\Delta\omega + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) \right) - \operatorname{div} \left(\frac{k}{r} \operatorname{grad}\psi \right), \quad (3.1.1)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad}\psi \right) = \omega,$$

где

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$k = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_3, \\ k_0(x, r), & \text{в } \Omega_2 \end{cases}$$

$k_0(x, r)$ - коэффициент проницаемости пористой среды.

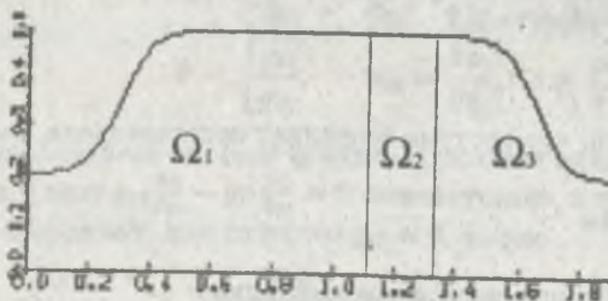


Рис. 7: Расчетная область

В криволинейной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ показанной на рис. 31, для уравнений (3.1.1) рассмотрим следующие краевые условия.

На входной границе Γ_1 :

$\psi = \psi_0(r), \quad \omega = \omega_0(r)$ где ψ_0, ω_0 известные функции.

На оси симметрии Γ_2 :

$$\omega = \psi = 0$$

На выходной границе Γ_3 , расположенной достаточно "далеко" от пористой вставки, полагаем $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$, т.е. ставим "мягкие" граничные условия.

На твердой стенке Γ_4 :

$$\psi = \text{const}, \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (3.1.2)$$

Преобразуем уравнения (3.1.1) из декартовой системы координат в произвольную ортогональную систему координат

$$x = x_1 = x_1(q_1, q_2), r = x_2 = x_2(q_1, q_2)$$

$$\begin{aligned} J \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \omega \right) &= \frac{1}{\hbar c} \left[\frac{\partial}{\partial q_m} \left(J g^{km} \frac{\partial \omega}{\partial q_k} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial q_m} \left(J \frac{\omega}{r} \frac{\partial x_m}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(J \frac{1}{r} g^{km} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right), \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{r} J g^{km} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right) = J \omega \right] \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование)

где $J = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_2} - \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_1}$ — Якобиан преобразования.

$\vec{x} : G \rightarrow X, g^{km} = \frac{\partial x_k}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial x_n}$ (по повторяющимся индексам производится суммирование), $k, m, n = 1, 2$.

Далее введем

$$g_{km} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_m}, k, m = 1, 2$$

Очевидно, что

$$g_{11} \cdot g_{22} = g_{12}^2 + J^2$$

В силу того, что система координат ортогональная, имеем

$$g_{12} = 0.$$

Тогда получим

$$J^2 = g_{11} \cdot g_{22}$$

Сделаем следующие несложные выкладки

$$\begin{aligned} J g^{11} &= \frac{J^2 \left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} \right)^2 \right)}{J} = \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_2} - \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} \right)^2 \right)}{J} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2}{J} = \frac{g_{22}}{J} = \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \end{aligned}$$

Произведя аналогичные преобразования, из (3.1.3) с учетом орто-

гональности системы координат имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \omega \right) = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\omega}{r} a_{12} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\omega}{r} a_{11} \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Запишем систему уравнений (3.1.4) в более удобной для дальнейшего исследования форме:

$$\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (L_1 + L_2) \omega = -L_3 \psi \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\Phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r \Phi} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega, \quad (3.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 \omega &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{a_{12}}{Re} \right) \omega \right] - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\Phi \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right), \\ L_2 \omega &= -\frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{a_{11}}{Re} \right) \omega \right] - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right), \\ L_3 \psi &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{k}{r} \Phi \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k}{r \Phi} \psi \right), \\ \Phi &= \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}, \quad a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

В криволинейной системе координат условия вида (3.1.2) записывается в виде $g_{12} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - g_{11} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0$ следовательно, в ортогональной системе координат, для которого $g_{12} = 0$, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0 \quad (3.1.7)$$

Заметим, что компоненты вектора скорости $\vec{u} = (u, v)$ в криволинейной системе координат выражаются через производные от функции тока следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r'} (a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}), \\ v &= -\frac{1}{r'} (a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - a_{21} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

3.2 Метод построения ортогональной криволинейной сетки

Для осуществления отображения области Ω (см. рис. 7) в параметрический прямоугольник, Ω представляется в виде суммы подобластей типа Ω_1 и $\Omega_2 \cup \Omega_3$.

Для численного построения ортогональной криволинейной сетки в подобласти Ω_1 использованы дифференциальные уравнения из [85], которые (в предположении, что $g_{12} = 0$) можно представить в следующем виде

$$\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_1^2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial x_l}{\partial q_2} \right) = 0, l = 1, 2 \quad (3.2.1)$$

На верхней границе Ω_1 узлы координатной сетки выбираются соответственно численной параметризации по длине дуги кривой [67]. Для этого численно решается следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\Phi \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right) \quad (3.2.2)$$

со следующими граничными условиями

$$x_1(0) = 0, x_1(q_1^*) = x_1^*$$

где

$$\Phi = \sqrt{1 + \left(\frac{d(x_1)}{d(q_1)} \right)^2}$$

На верхней границе подобласти $\Omega_2 \cup \Omega_3$ строится неравномерная прямоугольная сетка, согласованная с криволинейной сеткой в Ω_1 .

В остальной части контура области Ω_1 граничные условия для уравнений (3.2.1) полагаем следующими:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0 \quad \text{при} \quad q_1 = 0, 0 \leq q_2 \leq 1, \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} = 0, \quad x_2 = 0, \quad \text{при} \quad 0 \leq q_1 \leq 1, q_2 = 0 \\ x_1 = x_{1,L}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0 \quad \text{при} \quad q_1 = 1, 0 \leq q_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Нетрудно проверить, что задание в (3.2.3) производных по нормали равными нулю обеспечивает ортогональность координатных линий на соответствующих участках грани.

Численное решение уравнений (3.2.1) для $\vec{x} : E \rightarrow \Omega$ с фиксированными значениями $\vec{x} = (x_1, x_2)$ на верхней границе Ω_1 и удовлетворяющего краевым условиям (3.2.3) осуществляется методом установления по разностной схеме типа стабилизирующей поправки [14]:

$$(E - \tau L_{11}^h) \cdot (E - \tau L_{22}^h) \cdot \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = L_{11}^h x_i^n + E - L_{22}^h x_i^n \quad (3.2.4)$$

где L_{11}^h, L_{22}^h разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов из (3.2.1)

$$L_{11}^h(x) = \frac{1}{h^2} \left(\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_{i+1/2, j} (x_{i+1, j} - x_{i, j}) - \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_{i-1/2, j} (x_{i, j} - x_{i-1, j}) \right),$$

$$L_{22}^h(x) = \frac{1}{h^2} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right)_{i, j} (x_{i, j+1} - 2x_{i, j} + x_{i, j-1})$$

Граничные условия (3.2.3) аппроксимированы со вторым порядком точности и имеют вид

$$x_{1(i, 1)} = \frac{4x_{1(i, 2)} - x_{1(i, 3)}}{3},$$

$$x_{2(1, j)} = \frac{4x_{2(2, j)} - x_{2(3, j)}}{3},$$

$$x_{2(N_1, j)} = \frac{4x_{2(N_1-1, j)} - x_{2(N_1-2, j)}}{3},$$

Производные, входящие в g_{11}, g_{22} всюду аппроксимированы центральными разностями.

На рис. 8 приведена построенная вышеуказанным способом конечно-разностная криволинейная сетка в области, характерной для рассматриваемой в подразделе 3.1 краевой задачи для уравнений Навье-Стокса.

Данная область сверху ограничена следующими линиями

$$x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t h R(x_1 - x_1^0) = f_1(x_1), 0 \leq x_1 \leq x_1^0,$$

$$x_2 = f(x_1^*), x_1^* \leq x_1 \leq x_{1L}$$

где $a = 0.2, b = 0.5, x_1^0 = 0.3, x_1^* = 0.7, x_{1L} = 4, q_1^* = 0.35$. Неравномерная сетка на отрезке (x_1^*, x_{1L}) строится по следующему квадратному уравнению

$$x_1(q_1) = \bar{a}q_1^2 + \bar{b}q_1 + \bar{c}, q_1^* \leq q_1 \leq 1$$

а коэффициенты $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ находятся из условий

$$x_1(1) = x_{1,L}, x_1(q_1^*) = x_1^*$$

и условия согласованности с криволинейной сеткой в Ω_1 . При этом параметр τ выбирался равным $\tau = 0.05$. Счетное время 5 мин.

3.3 Описание конечно-разностных соотношений

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (3.1.5), (3.1.6) рассмотрим следующую итерационную конечно-разностную схему расщепления [142]

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\omega_{ij}^{n+1/3} - \omega_{ij}^n}{\tau} + L_{1,h} \omega^{n+1/3} + L_{2,h} \omega^n &= -L_{3,h} \psi^n \\ \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\omega_{ij}^{n+2/3} - \omega_{ij}^{n+1/3}}{\tau} + L_{1,h} \omega^{n+1/3} + L_{2,h} \omega^{n+2/3} &= -L_{3,h} \psi^n, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+2/3}}{\tau} &= -L_{3,h} (\psi_{n+1} - \psi^n), \\ \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \psi_{q_1}^{n+1} \right)_{q_1} + \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \psi_{q_2}^{n+1} \right)_{q_2} &= \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega_{ij}^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где L_{1h}, L_{2h}, L_{3h} - разностные аналоги дифференциальных операторов L_1, L_2, L_3 , в которых конвективные члены аппроксимированы с учетом знака скорости потока [127]. Соответствующие операторы вторых производных в уравнении (3.1.5) и (3.1.6) в соотношениях (3.3.1), (3.3.2) аппроксимированы с порядком $O(h^2)$ где $h = \max(h_1, h_2)$, ($h_k, k = 1, 2$ - шаги параметрической сетки соответственно по направлению q_1, q_2). Покажем разностную аппроксимацию конвективных членов

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) \sim \frac{1}{h_1} \left(\left(\frac{1}{r} \psi_{q_1} \right)_{i+1/2, j} \omega_{ij} - \left(\frac{1}{r} \psi_{q_1} \right)_{i-1/2, j} \omega_{i-1, j} \right),$$

если $\left(\frac{1}{r} \psi_{q_1} \right)_{i+1/2, j} > 0$ и $\left(\frac{1}{r} \psi_{q_1} \right)_{i-1/2, j} > 0$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) \sim \frac{1}{h_1} \left(\left(\frac{1}{r} \psi_{q_2} \right)_{i+1/2, j} \omega_{i+1, j} - \left(\frac{1}{r} \psi_{q_2} \right)_{i-1/2, j} \omega_{i, j} \right),$$

если $\left(\frac{1}{r} \psi_{q_2} \right)_{i+1/2, j} < 0$ и $\left(\frac{1}{r} \psi_{q_2} \right)_{i-1/2, j} < 0$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) \sim \frac{1}{h_1} \left(\left(\frac{1}{r} \psi_{q_1} \right)_{i+1/2, j} \omega_{ij} - \left(\frac{1}{r} \psi_{q_1} \right)_{i-1/2, j} \omega_{i, j} \right).$$

если $(\frac{1}{r}\psi_{q_2})_{i+1/2,j} > 0$ и $(\frac{1}{r}\psi_{q_2})_{i-1/2,j} < 0$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) \sim \frac{1}{h_1} \left(\left(\frac{1}{r} \psi_{q_2} \right)_{i+1/2,j} \omega_{i+1,j} - \left(\frac{1}{r} \psi_{q_2} \right)_{i-1/2,j} \omega_{i-1,j} \right),$$

если $(\frac{1}{r}\psi_{q_2})_{i+1/2,j} < 0$ и $(\frac{1}{r}\psi_{q_2})_{i-1/2,j} < 0$

Аналогично аппроксимирована конвективная производная $\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \omega \right)$.
Учет краевого условия (3.1.7) на твердой стенке осуществляется по следующей формуле Тома для значения вихря ω с релаксацией на полном итерационном шаге

$$\begin{aligned} \omega_{i,N_2}^{n+1} &= (1 - \alpha) \omega_{i,N_2}^n - \\ &- \alpha \cdot \frac{2\psi_{q_2,i,N_2-1/2}^{n+1}}{r_{i,N_2-1/2} \left[(x_{1,q_2,i,N_2-1/2})^2 + (x_{2,q_2,i,N_2-1/2})^2 \right]} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Покажем вывод формулы Тома.

В силу граничных условий на твердой стенке $\psi = const$, $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ имеем

$$\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega_{i,N_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)_{i,N_2} \quad (3.3.4)$$

Разложим в ряд Тейлора функцию

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)_{i,N_2-1/2} &= \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)_{i,N_2} - \\ &- \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)_{i,N_2} + O(h_2^2) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Используя (3.3.4) и учитывая граничное условие получим

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega_{i,N_2} &= -\frac{2}{h_2} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)_{i,N_2-1/2} + O(h_2) \\ \omega_{i,N_2} &= -\frac{2}{h_2} \left(\frac{1}{r} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)_{i,N_2-1/2} \end{aligned}$$

Используя обозначения из [11] имеем

$$\omega_{i,N_2} = \frac{-2\psi_{q_2,i,N_2-1/2}}{r_{i,N_2-1/2} \left[(x_{1,q_2,i,N_2-1/2})^2 + (x_{2,q_2,i,N_2-1/2})^2 \right] h_2} \quad (3.3.6)$$

Алгоритм реализации предложенного метода заключается в следующем:

1. На первом этапе из первых двух соотношений (3.3.1) с помощью скалярной прогонки находим значения $\omega^{n+2/3}$ внутри расчетной области.

2. Затем, из последнего соотношения (3.3.1), исключая ω^{n+1} с помощью выражения (5.3.2) получаем для определения ψ^{n+1} конечно-разностное уравнение вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}(1 + \tau k)\psi_{\bar{1}}^{n+1}\right)_{\bar{1}} + \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}(1 + \tau k)\psi_{\bar{2}}^{n+1}\right)_{\bar{2}} = \\ = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}\omega^{n+2/3} + \tau L_{3h}\psi^n, \end{aligned}$$

решение которого, при заданных краевых условиях на границе, реализована с помощью попеременно-треугольного метода.

3. После нахождения ψ^{n+1} внутри сеточной области, определяем ω^{n+1} по формуле (3.3.2) и на границе по формуле (3.3.3).

При этом вычисления по формулам (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) при заданном начальном значении ω продолжаются до тех пор, пока не выполнится критерий установления

$$\max_{i,j} \|\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n\| \leq \tau \epsilon$$

где $\epsilon > 0$ наперед заданная величина, характеризующая точность итерации.

3.4 Сравнение полученных результатов с решением тестового примера Роуча

Постоянно и непрерывно развиваются быстродействия и память компьютеров, а также улучшаются в точности и эффективности алгоритмов для решения уравнений в частных производных, позволяющие проводить вычисления течений жидкости для практических целей. Часто встречаются сложные геометрии, именно области, границы которых не совпадают с декартовыми или другими простыми координатными системами.

Для задач течения жидкости в областях со сложной геометрией метод конечных элементов является естественным подходом, как следствие гибкости в выборе геометрии. Однако метод конечных разностей часто дает преимущество в преобразовании координат и

построении сетки. Эти простые преимущества определяют эффективность метода. Фактически оба метода имеют свои собственные достоинства и трудности, так что иногда и тот другой является хорошим.

Статья M.Napoliitano и P.Orlandi [72] есть отчет рабочей группы по вычислительной гидродинамике ассоциации International Association for Hydraulic Reseach (IAHR) на тему: "Вычисление ламинарного течения в областях сложной геометрии". Рабочая группа пришла к выводу, что важным вопросом может быть сравнение различных методов на одной определенной задаче.

Предварительное обсуждение задач конвекции показывают что, многие из них крайне чувствительны к дискретизации конвективных членов. Поэтому тестовая задача была выбрана так, в котором конвективный перенос является второстепенным, именно ламинарное течение через плавно расширяющийся канал предложенный Роучем.

Тестовая задача Роуча посвящена изучению ламинарного течения жидкости в областях со сложной геометрией, т.е. в плоском канале с расширяющейся входной частью.

В данном подразделе для решения тестового примера в переменных ψ, ω использована схема переменных направлений. Для построения ортогональной криволинейной сетки использован метод, предложенный в работе [85].

Система уравнений Навье-Стокса в криволинейных координатах записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} & \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1} \omega \right) = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right) \right], \quad (3.4.1) \\ & \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega \end{aligned}$$

При построении конечно-разностной схемы производные по пространственным переменным аппроксимированы центральными разностями.

Расчетная область показана на рис. 8.

Нижняя граница (твердая стенка) канала задана следующей функцией $y_1 = (th(2 - 30x/Re) - th2)/2$ для $0 \leq x \leq x_{\text{вых}} = Re/3$

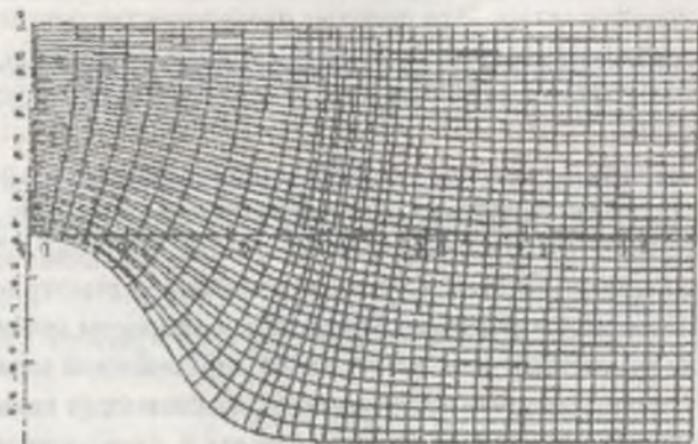


Рис. 8: Расчетная область

верхняя граница (ось симметрии) ограничена линией $y_u = 1$. Размер расчетной области зависит от числа Рейнольдса. С увеличением числа Re канал становится прямее и длиннее. При $Re \gg 1$ решения получаются квазиподобными.

Наиболее интересным является решение задачи при малых числах Re .

Входные граничные условия в декартовых переменных задаются так

$$u = 3(y - y^2/2), v = 0 \text{ для } x = 0, 0 \leq y \leq 1$$

или функция тока

$$\psi = (3y^2 - y^3)/2, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ для } x = 0, 0 \leq y \leq 1$$

На твердой стенке заданы, естественно, условия прилипания и непротекания ($0 \leq x \leq x_{\text{вых}}, y = y_1$); условия симметрии при $0 \leq x \leq x_{\text{вых}}, y = y_1$ на выходе заданы "мягкие" граничные условия

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Данная задача подобна задаче о течении около обратного уступа, влияние вязкости важно на входной границе, поэтому желательно фиксировать ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ на входной границе, в то время, как величина

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

находится по значению $\frac{\partial u}{\partial y}$ на входе и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Определим значение $\frac{\partial v}{\partial x}$ на входе.

Известно, что $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Запишем ее в криволинейных координатах

$$v = \frac{a_{21} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}}$$

В конечно-разностной форме

$$v_{2j} = \left((a_{21})_{2j} \frac{\psi_{2j+1} - \psi_{2j-1}}{2h_2} - (a_{22})_{2j} \frac{\psi_{2j} - \psi_{1j}}{2h_1} \right) / \left(\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \right)_{2j} \quad (3.4.2)$$

Представим $\frac{\partial v}{\partial x}$ в ортогональных криволинейных координатах

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x_1}$$

Сделав несложные преобразование, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = (a_{22} \frac{\partial v}{\partial q_1} - a_{21} \frac{\partial v}{\partial q_2}) / \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}$$

Учитывая, что $\frac{\partial v}{\partial y_1} |_{1j} = 0$ имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} |_{1j} = (a_{22} \frac{\partial v}{\partial q_1} / \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}) |_{1j}$$

Используя, что $v_{1j} = 0$ получим

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} |_{1j} = (a_{22} / \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}) |_{1j} v_{2j}$$

, где v_{2j} находится из соотношения (5.4.3).

В системе уравнений (3.4.1) отсутствует давление, однако его можно найти по известному решению для функции тока и вихря с помощью метода пошагового интегрирования [151], в котором полное давление $\Pi = P + (u^2 + v^2)/2$ вычисляется по его градиенту:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= -\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

или в ортогональных криволинейных координатах

$$\begin{aligned}
 a_{22} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} - a_{21} \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= \frac{1}{Re} (-a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} + a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial q_2}) + \\
 &+ (a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - a_{21} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}) \omega = f_1, \\
 -a_{12} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} + a_{11} \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= -\frac{1}{Re} (a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} - a_{21} \frac{\partial \omega}{\partial q_2}) + \\
 &+ (-a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}) \omega = f_2.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= \frac{a_{11} f_1 + a_{21} f_2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}, \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= \frac{a_{12} f_1 + a_{22} f_2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}.
 \end{aligned}$$

Численный расчет на ЭВМ проводился при следующих значениях параметров $\tau = 0.05$, $Re = 10$. Расчетная сетка имела размеры (41x41). Значения вихря на твердой стенке рассчитывались формулой Тома, с параметром релаксации $\alpha = 0.025$. Эллиптическое уравнение для нахождения значения функции тока решается методом верхней релаксации, с коэффициентом $\omega = 1.72$.

Результат расчета сравнивался с известными результатами приведенными в работе [98]. Где приводятся результаты численных расчетов пятнадцати групп исследователей, решавших поставленную задачу различными методами.

В таблице 1 приводятся фамилии групп авторов и место работы, численный метод и тип ЭВМ, и в конце сокращенно первые буквы фамилии авторов.

Таблица №1

Вычислители	Место работы	Метод решения	В каких перем. решается	Тип ЭВМ	Заглавные буквы фамилии авторов
1. Alfrink	Delft Hydraulics Laboratory, Netherland	К.Р.	u, v, p	CYBER 175	A
2. Cliffe et al.	AERE Harwell, U.K.	К.Э.	u, v, p	CRAY 1	CJG
3. Demorovic and Gosman	Imperial College London, U.K.		u, v, p	CDC 6600	DG
4. Goussebaile et al.	Lab. Nat. d'Hydraulique Chatou, France	К.Р.	u, v, p	CRAY 1	GBV
5. Grandotto	Commissariat a l'Energie Atomique, France	К.Э.	u, v, p	CRAY 1	G
6. Guj and Favini	Universita di Roma 'La Sapienza Italy	К.Р.	u, v, p	UNIVAC 110082	GF
7. Hutton	Central Electricity Generating Board	К.Р.	u, v, p	IBM 3032	II
8. Khaletzky	NEYRPIC, France	К.Р.	u, v, p	AS7000	K
9. Latrobe and Delapierre	Commissariat a l'Energie Atomique, France	К.Э.	u, v, p	CDC 7600	LD
10. Madi and Napolitano	Universita di Bari, Italy	К.Р.	ψ, ω	HP 1000F	MN
11. Porter et al.	AERE Harwell, U.K.	К.Р.	u, v, p	IBM 1 3033	PSW
12. Quartapelle and Napolitano	Politecnico di Milano, Italy	К.Э.	ψ, ω	AMDHL 470V8	QN

Вычислители	Место работы	Метод решения	В каких переменных решается	Тип ЭВМ	Заглавные буквы фамилии авторов
13. Rastogi	A. S. Veritas Research, Norway	К.Р.	u, v, p	UNIVAC 1100	R
14. Schonauer	Universitat Karlsruhe, Germany	К.Р.	w, u, v	SIEMENS 7865	S
15. Wada and Adachi	Gen. Res. Inst. of Electric Power	К.Р.	ψ, ω	CRAY1	WA1
16. Wada and	Industry Japan	К.Р.	u, v, p	CRAY1	WA2

Численные результаты всех участвующих групп сравнивались с результатом Cliffe К.А., Jackson С.Р., Greenfield А.С.

В таблице 2 приведены результаты расчетов значения вихря на твердой стенке. При этом значение давления выбиралось равным нулю при $x = x_{\text{вих}}/2$.

Проценты ошибок $\epsilon_\omega, \epsilon_p$ вычисления по сравнению с результатом CJG вычисляются следующими соотношениями

$$\epsilon_\omega = \frac{100}{19} \sum_{i=2}^{20} \left| \frac{\omega_i - \omega_{iCJG}}{\omega_{iCJG}} \right|, \quad \epsilon_p = \frac{100}{18} \sum_{i=2}^{20} \left| \frac{P_i - P_{iCJG}}{P_{iCJG}} \right|$$

Ошибки вычисления для всех методов, счетное время на ЭВМ, минимальное и выходные значения вихря на стенке приведены в таблице 4.

Таблица №2

r/x_{max}	WA2	DG	G	GBV	GF	H	K	LD
0.00	3.000	2.9890	2.9900	2.9700	2.9710	3.0000	3.0000	3.0000
0.05	2.5660	2.9320	2.5600	2.3000	2.2170	2.5760	2.5800	2.4000
0.1	1.8200	1.8670	1.8240	1.6300	1.4470	1.6977	1.7000	1.7200
0.15	0.9330	0.4577	0.6810	0.330	0.2710	0.3923	0.7000	0.2400
0.2	0.1520	-0.0435	0.0540	-0.0300	-0.2330	-0.0924	0.0300	-0.0800
0.25	0.0160	-0.0851	-0.0790	-0.1000	-0.2280	-0.1311	-0.1000	-0.1300
0.3	-0.0510	-0.1042	-0.0760	-0.1000	-0.1670	-0.1074	-0.1000	-0.0900
0.35	-0.0002	-0.0996	-0.0690	-0.0800	-0.1470	-0.1043	-0.0900	-0.1100
0.4	0.0450	-0.0874	-0.0570	-0.0700	-0.1420	-0.1015	-0.0700	-0.1200
0.45	0.0640	-0.0536	-0.0280	-0.0300	-0.1220	-0.0772	-0.0400	-0.0900
0.5	0.0900	-0.0010	0.0190	0.0000	-0.0810	-0.0293	0.0200	-0.0300
0.55	0.1330	0.0614	0.0760	0.0700	-0.0230	0.0327	0.0700	0.0200
0.6	0.1830	0.1261	0.1380	0.1300	0.0420	0.1009	0.1300	0.0900
0.65	0.2360	0.1884	0.2010	0.2000	0.1090	0.1705	0.1900	0.1500
0.7	0.2900	0.2451	0.2620	0.2700	0.1730	0.2384	0.2500	0.2200
0.75	0.3450	0.2939	0.3210	0.3000	0.2330	0.3034	0.3000	0.2600
0.8	0.4050	0.3331	0.3770	0.3500	0.2840	0.3652	0.3400	0.3100
0.85	0.4740	0.3611	0.4280	0.3500	0.3270	0.4230	0.3900	0.3400
0.9	0.5590	0.3766	0.4730	0.3300	0.3590	0.4753	0.4300	0.3400
0.95	0.6610	0.3811	0.5070	0.3200	0.3790	0.5152	0.4500	0.3400
1	0.7530	0.3856	0.5210	0.3100	0.3840	0.5317	0.4700	0.3400
MN	PSW	QN	R	S	WAI	CJG	наш расчет	
3.0113	3.0000	3.0750	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3	
2.5809	2.6100	2.5415	2.4000	2.5812	1.6710	2.5750	2.8758	
1.6524	1.6980	1.7594	1.4660	1.7002	0.9630	1.7060	1.6727	
0.4952	0.3920	0.4004	0.0600	0.3982	0.1870	0.3990	0.3835	
-0.0842	-0.0920	-0.1201	-0.0800	-0.0961	-0.0570	0.1000	-0.1043	
-0.1302	-0.1300	-0.1312	-0.1000	-0.1329	-0.0930	-0.1350	-0.1477	
-0.1091	-0.1250	-0.1075	-0.1220	-0.1071	-0.0850	-0.1080	-0.1007	
-0.1035	-0.1180	-0.1044	-0.1240	-0.1050	-0.0810	-0.1060	-0.1037	
-0.0995	-0.1020	-0.1034	-0.1040	-0.1030	-0.0770	-0.1030	-0.1135	
-0.0733	-0.0800	-0.0792	-0.0620	-0.0787	-0.0710	-0.0790	-0.0875	
-0.0261	-0.0350	-0.0327	0.0000	-0.0320	-0.0520	-0.0330	-0.0381	
0.0338	0.0250	0.0276	0.0660	0.0283	-0.0270	0.0270	0.0216	
0.0989	0.0840	0.0936	0.1320	0.0938	0.0090	0.0920	0.0858	
0.1629	0.1480	0.1593	0.2000	0.1591	0.0460	0.1570	0.1501	
0.2225	0.2040	0.2209	0.2320	0.2207	0.0810	0.2170	0.2190	
0.2761	0.2560	0.2766	0.2660	0.2765	0.1130	0.2720	0.2657	
0.3228	0.2960	0.3257	0.3000	0.3251	0.1270	0.3190	0.3128	
0.3614	0.3300	0.3667	0.3320	0.3652	0.1650	0.3570	0.3507	
0.3869	0.3400	0.3943	0.3320	0.3957	0.1780	0.3850	0.3782	
0.4108	0.3660	0.4122	0.3320	0.4151	0.1920	0.4020	0.3941	
0.4341	0.3926	0.4215	0.3320	0.4220	0.1970	0.4080	0.3975	

Таблица №3

$r/r_{облr}$	WA2	A	DG	G	GBV	GF	H
0.0000	-0.045	-0.2890	-0.2094	-0.2690	-0.3125	-0.4460	-0.4154
0.05	-0.05	-0.2840	-0.2523	-0.3040	-0.2900	-0.3880	-0.3187
0.1	-0.064	-0.2610	-0.2952	-0.3200	-0.2675	-0.3370	-0.3386
0.15	-0.048	-0.2160	-0.2339	-0.2570	-0.2150	-0.2610	-0.2602
0.2	-0.035	-0.1560	-0.1458	-0.1520	-0.1400	-0.1640	-0.1497
0.25	-0.02	-0.1040	-0.1001	-0.0960	-0.0875	-0.1020	-0.0933
0.3	-0.009	-0.0710	-0.0756	-0.0700	-0.0600	-0.0740	-0.0683
0.35	-0.008	-0.0520	-0.0553	-0.0530	-0.0450	-0.0560	-0.0529
0.4	-0.006	-0.0350	-0.0362	-0.0360	-0.0300	-0.0390	-0.0388
0.45	-0.003	-0.0180	-0.0174	-0.0180	-0.0150	-0.0190	-0.0178
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.55	0.0040	0.0170	0.0151	0.0160	0.0175	0.0180	0.0165
0.6	0.007	0.0320	0.0278	0.0300	0.0275	0.0330	0.0302
0.65	0.01	0.0440	0.0380	0.0410	0.0375	0.0460	0.0413
0.7	0.017	0.0550	0.0459	0.0500	0.0425	0.0570	0.0404
0.75	0.018	0.0640	0.0520	0.0570	0.0500	0.650	0.0574
0.8	0.016	0.0710	0.0565	0.0610	0.0550	0.0710	0.0133
0.85	0.16	0.0760	0.0559	0.0640	0.0600	0.0660	0.0636
0.9	0.014	0.0810	0.0628	0.0630	0.0675	0.0790	0.0634
0.95	-0.008	0.0856	0.0660	0.0610	0.0725	0.0810	0.0603
1	-0.003	0.0860	0.0691	0.0590	0.0775	0.0830	0.0560

Продолжение таблицы №3

K	LD	MN	PSW	R	WA1	CJG	наш расчет
-0.2300	-0.3240	-0.30888	-0.3028	-0.1625	-0.0830	-0.6650	-0.22809
-0.2400	-0.3140	-0.3163	-0.3166	-0.1450	-0.1020	-0.3170	-0.302221
-0.2400	-0.3100	-0.3113	-0.3280	-0.1250	-0.1060	-0.3400	-0.33527
-0.2050	-0.2400	-0.2467	0.2620	-0.0750	-0.0810	-0.2620	-0.28148
-0.1400	-0.1560	-0.1514	-0.1660	-0.0375	-0.0570	-0.1510	-0.16833
-0.0960	-0.0940	-0.0948	-0.1063	-0.0225	-0.0400	-0.0920	-0.09914
-0.0700	-0.0680	-0.0680	-0.0781	-0.0175	-0.0290	-0.0680	-0.06925
-0.0500	-0.0500	-0.0514	-0.0556	-0.0125	-0.0190	-0.0530	-0.05344
-0.0320	-0.0320	-0.0351	-0.0370	-0.0100	-0.0100	-0.0370	-0.03682
-0.0170	-0.0160	-0.0173	-0.0196	-0.0050	-0.0070	-0.0180	-0.01819
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0170	0.0160	0.0156	0.0149	0.0075	0.0060	0.0160	0.0166
0.0300	0.0280	0.0289	0.0284	0.0125	0.0130	0.0300	0.03114
0.0420	0.0400	0.0397	0.0392	0.0200	0.0190	0.0410	0.04337
0.0500	0.0480	0.0482	0.0482	0.0220	0.0230	0.0500	0.05328
0.0600	0.0560	0.0548	0.0560	0.0270	0.0270	0.0570	0.06104
0.0650	0.0640	0.0598	0.0605	0.0310	0.0300	0.0620	0.06691
0.0700	0.0680	0.0633	0.0656	0.0330	0.0330	0.0660	0.07118
0.0720	0.0730	0.0654	0.0692	0.0350	0.0350	0.0680	0.07420
0.0720	0.0740	0.0673	0.0734	0.0370	0.0370	0.0700	0.07636
0.0720	0.0760	0.0692	0.0797	0.0380	0.0380	0.0710	0.07805

Вычислители	Счетное время	ω_{min}	ω_{max}	ϵ_{ω}	ϵ_p
A	168-0				10.67
DG	9-6	-0.1042	0.3856	26.51	8.11
G	5-9	-0.079	0.5210	52.12	2.63
GBV	120-8	-0.1000	0.3100	34.92	11.15
GF	60-0	-0.2330	0.3810	48.98	10.72
H	7-65	-0.1311	0.5317	9.22	2.24
K	62-0	-0.1000	0.4700	41.21	8.24
LD	6415-0	-0.1300	0.3400	10.75	4.81
MN	1-2	0.1302	0.4341	6.70	3.44
PSW	10-0	-0.1300	0.3928	6.30	4.97
QN	104-0	-0.1312	0.4215	2.63	-
R	19-0	-0.1240	0.3320	30.14	61.25
S	168-0	-0.1329	0.4220	1.74	-
WA2	3-91	-0.051	0.7530	111.92	78.92
WA1		-0.0930	0.1970	55.04	58.56
CJG		-0.1350	0.5080	0.0	0.0
Наш расчет	53-40	-0.1477	0.3975	16.85	5.4383

3.5 Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду в областях со сложной геометрией

В данном случае метод решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в ортогональных криволинейных координатах применялся для решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричной трубе с пористой вставкой.

Осесимметричная труба имеет плавно расширяющуюся входную часть. Данная область ограничена следующими кривыми

$$r = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \text{th} R(x-x_0), r=0, x=0, x=x_L \quad (3.5.1)$$

где a, b, R, x_0, x_L - положительные константы.

Ортогональная криволинейная сетка при $a = 0.2, b = 0.5, R = 10,$

$x_0 = 0.7, x_L = 4$ строилась по методу, предложенному в [85].

При проверке условия ортогональности сетки $g_{12}/\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}$ выяснилось, что максимальная ошибка ортогональности сетки равна 0.0288.

Значение вихря на твердой стенке рассчитывается по Формуле Тома с коэффициентом релаксации $\alpha = 0,025$. Параметр выбирался равным $\tau = 0,056$, число Рейнольдса $Re = 100$.

Входные значения ω и ψ таковы

$$\psi = -\frac{r^4}{2a^2} + r^2, \quad \omega = -4a^2r$$

Коэффициент проницаемости пористой среды рассчитывается по следующей формуле

$$k = \frac{150(1 - \varepsilon)^2}{Re\varepsilon^3} \left(\frac{Dan}{d} \right)^2$$

где ε - коэффициент пористости, Dan - диаметр трубы, d - диаметр зерен пористого материала.

Численные расчеты проводились при следующих значениях коэффициента пористости

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq r \leq 0.2, \\ 1, & \text{при } 0.2 \leq r \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.5.2)$$

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 0.5, & \text{при } 0 \leq r \leq 0.2, \\ (100r^2 + 101)/210, & \text{при } 0.2 \leq r \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 0.4, & \text{при } 0 \leq r \leq 0.2, \\ (10r^2 - 4r + 4)/9, & \text{при } 0.2 \leq r \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 0.38, & \text{при } 0 \leq r \leq 0.2, \\ 0.62r^2 - 0.124r + 0.38, & \text{при } 0.2 \leq r \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 0.3, & \text{при } 0 \leq r \leq 0.2, \\ (100r^2 + 59)/210, & \text{при } 0.2 \leq r \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.5.6)$$

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 0.2, & \text{при } 0 \leq r \leq 0.2, \\ (50r^2 - 20r + 11)/45, & \text{при } 0.2 \leq r \leq 0.5 \end{cases} \quad (3.5.7)$$

Как показали численные эксперименты, количество итераций N мало зависит от разброса коэффициента проницаемости пористой среды.

В таблице 5 приведены результаты вычислений при различных значениях ε . Здесь k_{max} - максимальное значение коэффициента сопротивления пористой среды, ε_{min} , ε_{max} - минимальное и максимальное значения пористости слоя, N - количество итераций. Все

расчеты проводились на ПЭВМ с одного и того же начального приближения до тех пор, пока $\left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right\|_{L_2}$ не становилось меньше $\epsilon = 10^{-3}$.

Таблица №5

№	k_{max}	ϵ_{min}	ϵ_{max}	N
1	0	1	1	137
2	300	0.5	0.6	150
3	843.75	0.4	0.5	152
4	1050.8	0.38	0.473	155
5	2722	0.3	0.4	163
6	12000	0.2	0.3	200

На рис. 10 приведены изолинии функции тока. Как видно из этих результатов, течения вязкого газа через пористую среду в трубах с расширяющимися участками диффузора образуются вихревые зоны. Увеличение поперечного сечения по длине диффузора обуславливает уменьшение средней скорости течения и, согласно уравнению Бернулли, повышение статического давления.

Таким образом, вдоль диффузора устанавливается положительный градиент давления, вызывающий силу, которая направлена против основного течения.

Статическое давление, повышающееся вдоль диффузора, одинаково по всему поперечному сечению, включая область, непосредственно прилегающую к стенке, тогда как скорости распределены по сечению неравномерно и снижаются до нуля у стенки. Вследствие того, что по длине диффузора скорости продолжают уменьшаться, при определенных значениях a, b, R, x_0 возникает состояние, при котором запас кинетической энергии потока в пограничном слое становится недостаточным для преодоления давления, характеризующегося положительным градиентом, и поток отрывается от стенок.

Увеличение коэффициента проницаемости пористой среды при одинаковых числах Рейнольдса мало влияет на объем вихревой зоны, так как пористая среда расположена вдали от диффузорной части трубы.

Как видно из результатов расчетов (рис. 10, 11, 12), с увеличением числа Re длина вихревой зоны увеличивается вплоть до пористой перегородки.

Re	x_1	x_2	ψ_{max}
100	0.5992	0.35401	0.02204
500	1.3761	0.37482	0.02931
1000	1.4062	0.3998	0.03801

Из таблицы 6 видно, что центр зоны рециркуляции перемещается к верхнему углу перед пористой вставкой. При этом, как видно из таблицы 6 с увеличением числа Re , увеличивается значение ψ_{max} . Все приведенные в таблице 6 результаты при $\epsilon = 0.2 - 0.3$, но при различных значениях числа Re .

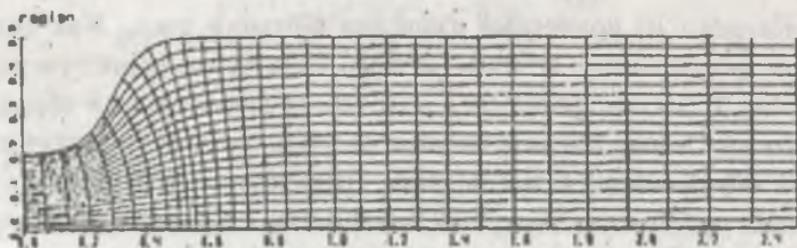


Рис. 9: Расчетная область и сетка

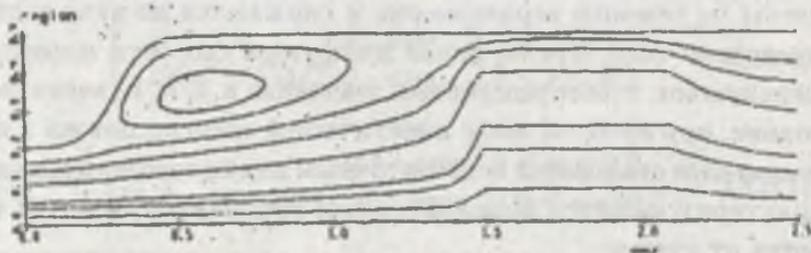


Рис. 10: Изолинии функции тока при $Re = 100, \epsilon = 0,4 - 0,5$

На рис. 13 показаны профили продольной составляющей скорости внутри пористого слоя при одинаковом числе $Re \approx 100$ и

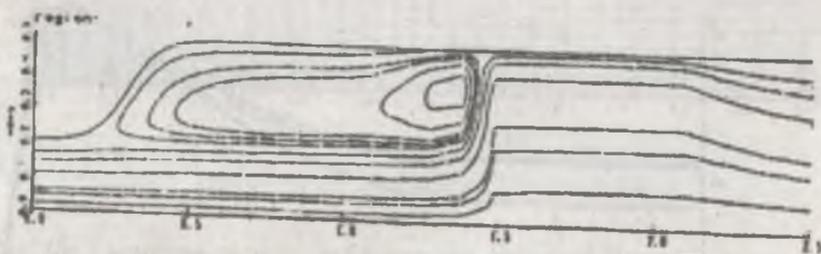


Рис. 11: Изолинии функции тока при $Re = 500, \epsilon = 0,2 - 0,3$

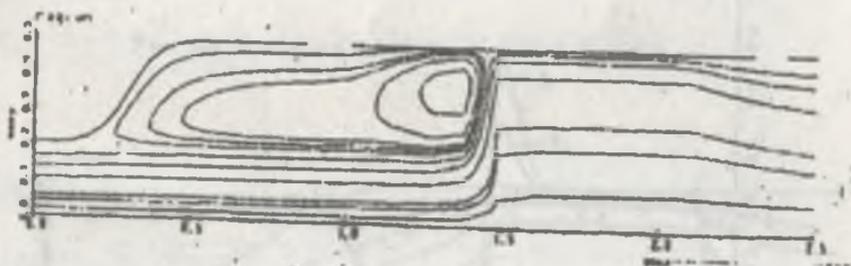


Рис. 12: Изолинии функции тока при $Re = 1000, \epsilon = 0,2 - 0,3$

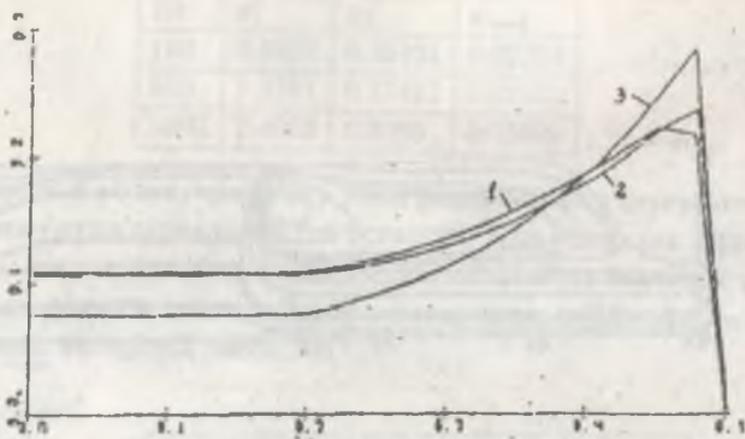


Рис. 13: Профили горизонтальной составляющей скорости

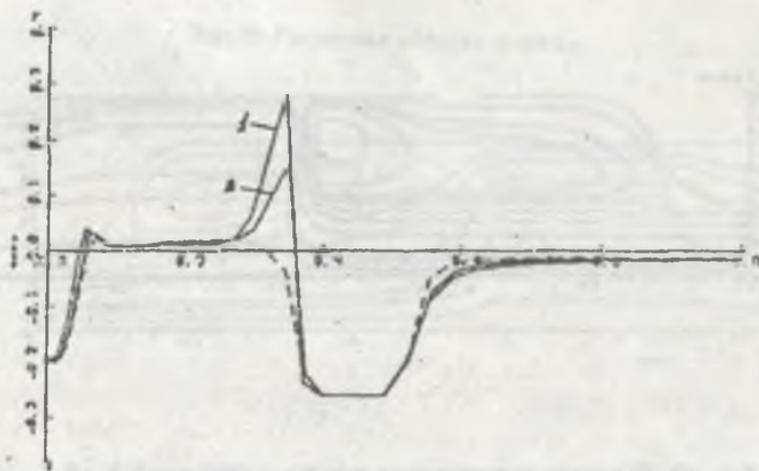


Рис. 14: Значения вихря на твердой стенке

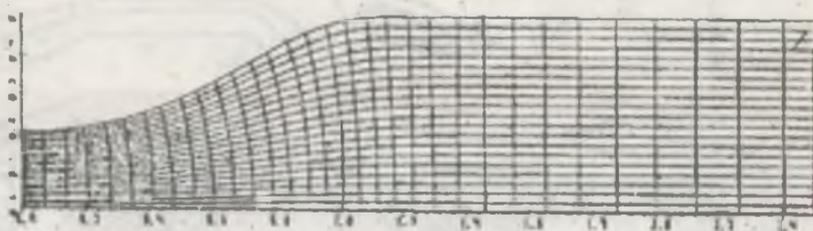


Рис. 15: Расчетная область, ограниченная функцией Витошинского

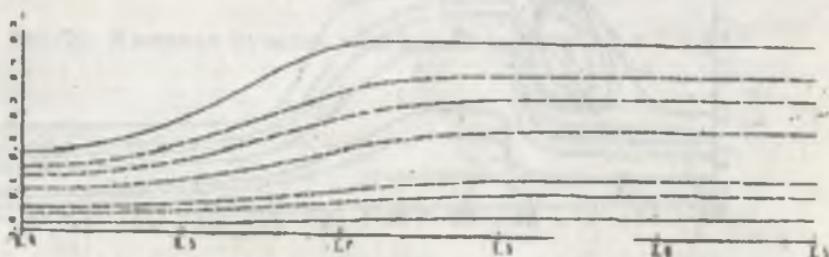


Рис. 16: Изолинии функции тока при $Re = 50$

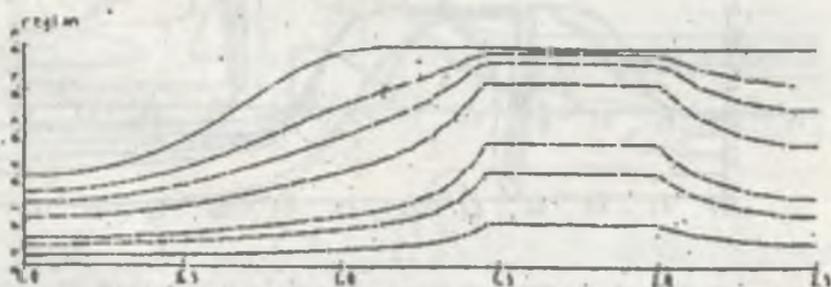


Рис. 17: Изолинии функции тока при $Re = 50, \epsilon = 0,38 - 0,43$

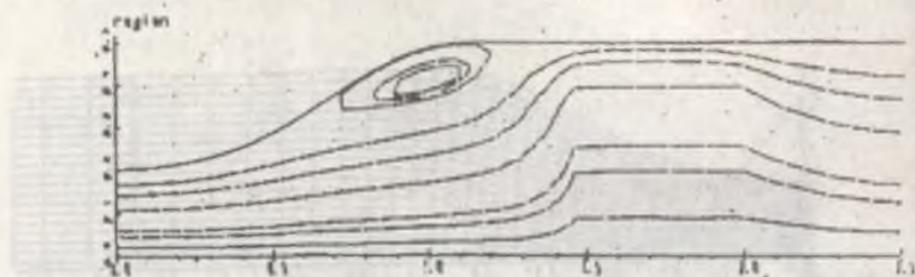


Рис. 18: Изолинии функции тока при $Re = 100, \epsilon = 0,38 - 0,43$

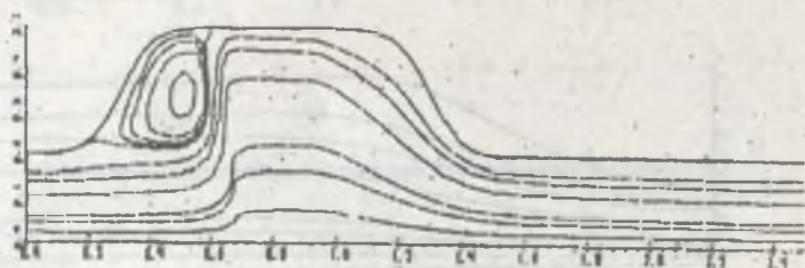


Рис. 19: Изолинии функции тока при $Re = 250, \epsilon = 0,4 - 0,5$



Рис. 20: Изолинии вихря скорости при $Re = 100, \epsilon = 0,4 - 0,5$

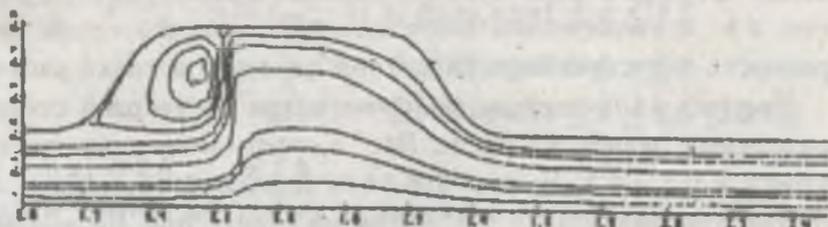


Рис. 21: Изолинии функции тока при $Re = 500, \epsilon = 0,4 - 0,5$

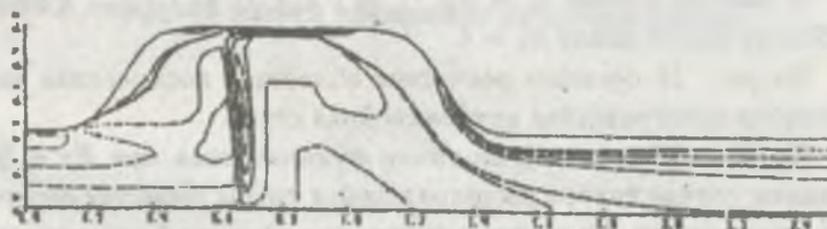


Рис. 22: Изолинии вихря скорости при $Re = 500, \epsilon = 0,4 - 0,5$

при различных значениях коэффициента пористости. Со значком 1 обозначен профиль скорости при $\varepsilon = 0.5 - 0.6$, $k_{max} = 300$, значком 2 обозначен профиль скорости при $\varepsilon = 0.34 - 0.4$, $k_{max} = 2722$, значком 3 указывается профиль скорости при $\varepsilon = 0.2 - 0.3$, $k_{max} = 12000$. Отсюда видно, что с уменьшением коэффициента пористости, т.е. с увеличением сопротивления пористой среды, неоднородность значения скорости внутри пористой вставки растет.

На рис. 14 приведены значения вихря на твердой стенке при различных значениях числа Re . Коэффициент пористости при этом $\varepsilon = 0.2 - 0.3$. На рисунке 14 со значком 1 обозначена линия, соответствующая значению вихря на стенке при $Re = 1000$. Со значком 2 обозначено значение вихря при $Re = 500$. А пунктирная линия соответствует значению вихря при $Re = 100$. Из данного рисунка видно, что перед пористой вставкой значение вихря на стенке растет с увеличением числа Re .

В следующих расчетах вместо функции (3.4.1) была взято часто встречающаяся на практике функция Витошинского

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\right) \cdot \frac{(1 - 3x^2/a^2)^2}{(1 + 3x^2/a^2)^2}}} \quad (3.5.8)$$

где r_1 - радиус выходного сечения трубы, r_0 - радиус входного сечения трубы, x - координата вдоль оси трубы (при $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $r = r_0$).

Параметр a обычно принимают равным 4.

В данном случае $r_0 = 0.5$, $r_1 = 0.2$, $x \in [0; 1.15]$. Расчетная область имеет длину $x_L = 4$.

На рис. 15 показана расчетная область и построенная внутри области ортогональная криволинейная сетка.

На рис. 16 показаны изолинии функции тока при $Re = 50$. В данном случае внутри расширяющейся трубы пористая перегородка отсутствует. Из рисунка видно, что течение бесотрывное, т.е. вихревая зона отсутствует.

На рис. 17 изображен стационарный поток внутри с пористой перегородкой при $Re = 50$, $\varepsilon = 0.38 - 0.43$.

На рис. 18 показаны изолинии функции тока при $Re = 100$, $\varepsilon = 0.38 - 0.43$.

Из результатов численных расчетов можно заключить, что в диффузорах ограниченной функцией (3.4.8) при малых числах Re ($Re < 60$) устанавливается безотрывное течение.

На рис. 19 изображена изолиния течения в области, ограниченная линиями $x = 0, x = 2.5, r = 0$.

$$r = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \text{th} R(x - x_0) = f_1(x), \text{ при } 0 \leq x \leq 0.6 \quad (3.5.9)$$

$$r = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \text{th} R(x_{on} - x) = f_2(x), \text{ при } 1 \leq x \leq 1.5$$

$$r = f_1(0.6), \text{ при } 0.6 \leq x \leq 1$$

$$r = f_2(x), \text{ при } 0.5 \leq x \leq 2.5 \quad (3.5.10)$$

где $x_0 = 0.3, x_* = 0.6, x_{on} = 1.3$.

Приведен численный расчет стационарного потока изотермической жидкости в каталитическом реакторе при $Re = 100, \epsilon = 0.4 - 0.4..$ Численный расчет проводился при $\tau = 0.05$, счетное время при этом 38 мин.

На рис. 19, 20 приведены изолинии функции тока и функции вихря при $Re = 250, \epsilon = 0.4 - 0.5$. На рис. 21, 22- изолинии функции тока и функции вихря при $Re = 500, \epsilon = 0.4 - 0.5$.

Данные расчета показывают, что с увеличением числа Re интенсивность зоны завихренности в диффузоре увеличивается и профиль скорости внутри пористого слоя и за ней становится более неоднородным. Из рисунков видно, что течение через пористую вставку является вихревым и вихрь зарождается в результате взаимодействия текущей среды с пористым материалом.

Из результатов можно заключить, что пристенных течениях зарождения и диффузия вихрей происходит от стенки канала.

3.6 Численное моделирование конвективного тепло-массообмена течения вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду

Эффективность работы контактных аппаратов во многом зависит от степени равномерности потока реакционной смеси по объему реактора, и в частности, по слою катализатора, что в конечном счете определяет выход продукта и производительность аппарата. При плохом распределении потока реакционной смеси по сечению аппарата возможны значительные перегревы катализатора, потеря избирательности и другие нежелательные эффекты.

На основе математического моделирования можно выбрать оптимальный режим работы промышленных аппаратов с криволинейными стенками.

Передача теплоты в пористых материалах осуществляется посредством теплопроводности самих частиц материала, теплопроводности жидкости, заполняющего поры материала или конвекции жидкости в среде которого находится пористая среда. Даже простое перечисление всех видов переноса в пористых средах делает очевидным тот факт, что эффективная теплопроводность такой системы является сложнейшей функцией температуры, давления жидкости, пористости, размеров и формы частиц и пор, степени черноты и температуры граничных поверхностей и многих других факторов. Составление, анализ и решение уравнений, учитывающих все виды переноса теплоты и указанные выше факторы, встречает очень большие трудности.

Построение эффективных численных алгоритмов для решения задач теплообмена в областях со сложной геометрией представляет большой интерес специалистам в области вычислительной гидродинамики. При рассмотрении системы уравнений в переменных функция тока, вихрь скорости возникают вычислительные трудности, обусловленные отсутствием граничного условия для вихря скорости на твердых стенках и построением сетки в областях со сложной геометрией.

В настоящем подразделе предлагается конечно-разностный метод для численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в пористых средах при воздействии температуры.

Система уравнений, описывающая течения вязкой несжимаемой жидкости через пористые среды с учетом поля температуры в ор-

тогональных криволинейных координатах записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \omega \right) = \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\omega}{r} a_{12} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\omega}{r} a_{11} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{k}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) - \frac{Gr}{Re^3} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} \cdot a_{22} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} \cdot a_{21} \right) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega \quad (3.6.2)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \Theta \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \Theta \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\Theta}{r} a_{12} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\Theta}{r} a_{11} \right) \right] + \frac{Nu \cdot F}{Re \cdot Pr} (T - \Theta) \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

$$\frac{1}{Re \cdot Pr} \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\kappa r \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\kappa r \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) \right] =$$

$$= \frac{Nu \cdot F}{Re \cdot Pr} \cdot \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} (T - \Theta) \quad (3.6.4)$$

где $g_{lm} = \frac{\partial x_n}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_m}$, $l, m, n = 1, 2$ (по повторяющимся индексам производится суммирование), $x_1 = x_1(q_1, q_2)$, $x_2 = x_2(q_1, q_2)$, $a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, $i, j = 1, 2$, ψ - функция тока, ω - вихрь скорости, Θ - температура жидкости, T - температура пористой среды, $Re = \frac{V D_{an}}{\nu}$ - число Рейнольдса, $Pe = \frac{V D_{an}}{a}$ - число Пекле, $Pr = \frac{Pr}{Re} = \frac{\nu}{a}$ - число Прандтля, $Fr = \frac{V^3}{g D_{an}} \cdot \frac{1}{\beta \Delta T}$ - число Фруда, $Gr = \frac{Re^3}{Fr} = \frac{\beta g D_{an}^3 \Delta T}{\nu^3}$ - число Грасгофа, $Nu = 0.664 \cdot Pr^{1/3} \sqrt{Re}$ - число Нуссельта, которая характеризует теплоотдачу, V - характерная скорость, a - коэффициент температуроводности, β - термический коэффициент расширения, ν - кинематический коэффициент вязкости, ΔT - масштаб перепада температур, g - ускорение силы тяжести. κ - коэффициент теплопроводности.

Коэффициент проницаемости пористой среды k и F определяются следующим образом:

$$F = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_3, \\ \frac{6(1-\varepsilon)}{d_p}, & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \quad (3.6.5)$$

$$k = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_3, \\ \frac{150(1-\varepsilon)^2}{r^2} \left(\frac{D_{an}}{d_p} \right)^2, & \text{в } \Omega_2 \end{cases}$$

где ε - коэффициент пористости, D_{an} - диаметр аппарата, d_p - диаметр пор.

Ставятся следующие граничные условия:

$$\text{На левой границе: } \psi = \psi_0(q_2), \omega = \omega_0(q_2), \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} = 0,$$

$$\text{На правой границе: } \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} = 0,$$

$$\text{На оси симметрии: } \psi = 0, \frac{\partial \omega}{\partial q_2} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} = 0, \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 \quad (3.6.6)$$

$$\text{На твердой стенке: } \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} = 0, T = 1, \psi = \text{const.}$$

Запишем уравнения (3.6.1), (3.6.2) в удобной форме:

$$\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (L_1 + L_2)\omega = -L_3\psi - \frac{Gr}{Re^2} \left(a_{22} \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} - a_{21} \frac{\partial \Theta}{\partial q_2} \right) \quad (3.6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\Phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{r\Phi} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega, \quad (3.6.8)$$

где

$$L_1\omega = \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{a_{12}}{Re} \right) \omega \right] - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\Phi \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right),$$

$$L_2\omega = -\frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{a_{11}}{Re} \right) \omega \right] - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right),$$

$$L_3\psi = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{k}{r} \Phi \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k}{r\Phi} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right),$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}, \quad a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, 2$$

Для численного решения уравнения (3.6.5), (3.6.6) рассмотрим следующую итерационную конечно-разностную схему расщепления:

$$\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\omega_{ij}^{n+1/3} - \omega_{ij}^n}{\tau} + L_{1,h}\omega^{n+1/3} + L_{2,h}\omega^n = -L_{3,h}\psi^n -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{Gr}{Re^2} \left(a_{22} \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{ij}}{h_1} - a_{21} \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{ij}}{h_2} \right), \\
\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\omega_{ij}^{n+2/3} - \omega_{ij}^{n+1/3}}{\tau} + L_{1,h} \omega^{n+1/3} + L_{2,h} \omega^{n+2/3} &= -L_{3,h} \psi^7 \quad (3.6.9) \\
\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+2/3}}{\tau} &= -L_{3,h} (\psi_{n+1} - \psi^n), \\
\left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \psi_{\varphi_1}^{n+1} \right)_{\varphi_1} + \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \psi_{\varphi_2}^{n+1} \right)_{\varphi_2} &= \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}} \omega_{ij}^{n+1},
\end{aligned}$$

где L_{1h}, L_{2h}, L_{3h} - разностные аналоги дифференциальных операторов L_1, L_2, L_3 , в которых конвективные члены аппроксимированы с учетом знака скорости потока.

Значение вихря ω на твердой стенке вычисляется по формуле Тома:

$$\omega_{i,N_2}^{n+1} = (1 - \alpha) \omega_{i,N_2}^n - \alpha \cdot \frac{2\psi_{\varphi_2, i, N_2 - 1/2}^{n+1}}{r_{i, N_2 - 1/2} \left[(x_{1, \varphi_2, i, N_2 - 1/2})^2 + (x_{2, \varphi_2, i, N_2 - 1/2})^2 \right]}$$

Температура жидкости Θ определяется следующей конечно-разностной схемой

$$\begin{aligned}
(\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}})_{ij} \frac{\Theta_{ij}^{n+1/2} - \Theta_{ij}^n}{\tau} + L_{1,h} \Theta^{n+1/2} + L_{2,h} \Theta^n &= \\
&= \frac{Nu \cdot F}{Re \cdot Pr} (T_{ij}^n - \Theta_{ij}^{n+1/2}) \quad (3.6.10) \\
(\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}})_{ij} \frac{\Theta_{ij}^{n+1} - \Theta_{ij}^{n+1/2}}{\tau} + L_{1,h} \Theta^{n+1/2} + L_{2,h} \Theta^{k+1} &= \\
&= \frac{Nu \cdot F}{Re \cdot Pr} (T_{ij}^n - \Theta_{ij}^{n+1})
\end{aligned}$$

Температура пористой среды T определяется итерационным методом

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1^2} \left[(\kappa r \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}})_{i+1/2,j} (T_{i+1,j}^{n+1,k} - T_{ij}^{n+1,k+1}) - \right. \\
& \left. - (\kappa r \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}})_{i-1/2,j} (T_{ij}^{n+1,k+1} - T_{i-1,j}^{n+1,k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{h_2^2} \left[(\kappa r \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}})_{i,j+1/2} (T_{i,j+1}^{n+1,k} - T_{ij}^{n+1,k+1}) - (\kappa r \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}})_{i,j-1/2} \right. \\
& \left. \cdot (T_{ij}^{n+1,k+1} - T_{i,j-1}^{n+1,k+1}) \right] = J \cdot r_{ij} \cdot Nu \cdot F \cdot (T_{ij}^{n+1,k+1} - \Theta_{ij}^{n+1}), \\
& 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1
\end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Разностные уравнения (3.6.10) с граничными условиями (3.6.6) для Θ численно реализуется скалярными прогонками.

Уравнение (3.6.4) описывает распределение тепла в пористой среде. На левой и правой границах области Ω_2 занятой пористой средой поставим условия согласования

$$\kappa a_{22} \frac{\partial T}{\partial q_1} = \alpha J(T - \Theta), \quad (3.6.12)$$

где $\alpha = \text{const}$, $J = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}$. Эти граничные условия аппроксимируем разностными граничными условиями вида

$$T_{i,j} = (\frac{\kappa a_{22}}{J} T_{i+1,j} + \alpha h_1 \Theta_{i,j}) / (\frac{\kappa a_{22}}{J} + h_1 \alpha) \quad (3.6.13)$$

$$T_{i_p,j} = (\frac{\kappa a_{22}}{J} T_{i_p-1,j} - \alpha h_1 \Theta_{i_p,j}) / (\frac{\kappa a_{22}}{J} - \alpha h_1), 0 \leq j \leq N_2$$

где, i - левая точка, i_p - правая точка.

Разностное уравнение Пуассона (3.6.11) с граничными условиями из (3.6.6) и (5.6.13) решается итерационным методом последовательной верхней релаксации.

Численные расчеты проводились для области, приведенной на рисунке 7 и она покрывалась сеткой 41×21 . В расчетах использовались значения: $Re = 50 - 381.402$, $Pr = 0.5 - 30$, $Nu = 4.36 - 50$. Изменяя масштаб перепада температуры ΔT расчеты проводились для чисел Грасгофа $Gr = 450 - 10^5$ и коэффициент пористости $\epsilon = 0.3 - 0.6$.

Из результатов численных расчетов можно сделать следующие выводы:

- с увеличением чисел Рейнольдса и Прандтля зона влияния температуры твердой стенки к протекающей жидкости уменьшается;
- внутри пористой среды течение жидкости является однородным;
- на выходе из пористой среды наблюдаются значительные неоднородности профиля скорости которая не зависит от формы задания профиля скорости на входе;
- температура пористой среды почти линейно уменьшается к центру расчетной области.

Результаты счета показывают что, с увеличением числа Re нагревается объем жидкости протекающей около пористой перегородки, а к выходу температуры жидкости уменьшается. Если пористую перегородку расположить в центре то вытекающая жид-

кость будет "холодной" (рис.59), а если близко к выходу то жидкость имеет определенную температуру (рис. 40). Профиль скорости при выходе из пористой перегородки является неоднородной, причем значение скорости в пристеночной области значительно больше, чем в "холодной" модели [162].

На рисунке 23 показаны изолинии функции тока и на рисунках 24, 25 изотермы температуры жидкости, а на рисунке 26 изотермы пористой среды.

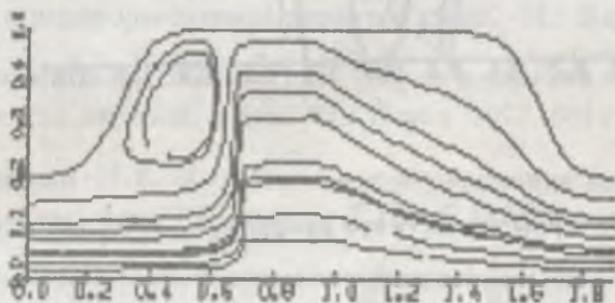


Рис. 23: Изолинии функции тока при $Re=250; Nu=4.36; Pr=15; Gr=10000$

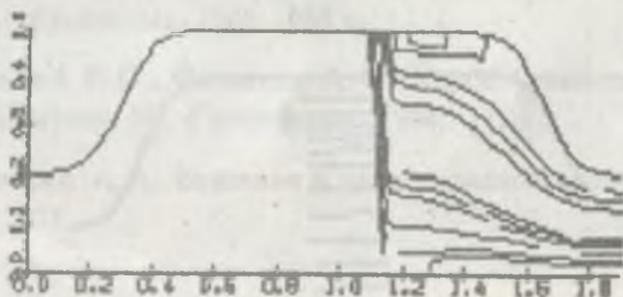


Рис. 24: Изотермы жидкости при $Re=50; Nu=5; Pr=4.34; Gr=10000$

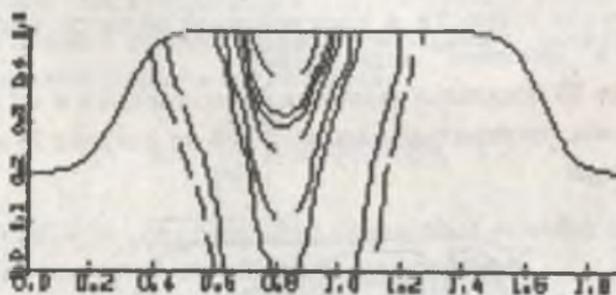


Рис. 25: Изотермы жидкости при $Re=250; Nu=4.36; Pr=15; Gr=10000$

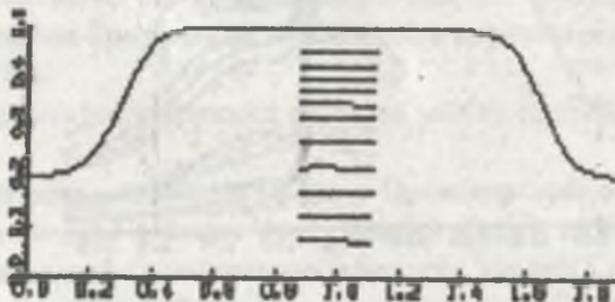


Рис. 26: Изотермы пористой среды при $Re=200; Nu=20.0761; Pr=10; Gr=10000$

Литература

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1970. -904 с.
- [2] Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. -Paris, 1856.
- [3] Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. -М.: Наука, 1973.
- [4] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. -2-е изд., перераб. и доп. -М.: Наука, 1977.-664 с.
- [5] Жуковский Н.Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод // Сбор.соч. -Т.III. -С.184-206.
- [6] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Наука, 1970.-288 с.
- [7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах //ЖВМ и МФ, 1961. -Т.1,-№1.-С.5-63.
- [8] Марчук Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958. -668 с.
- [9] Рябенский В.С., Филипов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. -171 с.
- [10] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. -М.: Наука, 1971. -552 с.
- [11] Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1983. -616 с.
- [12] Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы решение эллиптических уравнений.-М.: Наука, 1976.-352 с.
- [13] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. -М.: Наука, 1978. -592 с.
- [14] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1989. -608 с.

- [15] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. -М.: Наука, 1973.-439 с.
- [16] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. -М.: Наука, 1978. -688 с.
- [17] Яненко Н.Н. Введение в разностные методы математической физики. Часть I и II. -Новосибирск, Изд. НГУ, 1968. -388 с.
- [18] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. -М.: Мир, 1972.-264 с.
- [19] Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. -Новосибирск: Наука, 1979. -222 с.
- [20] Абрашин В.Н. К теории разностных схем для нелинейных нестационарных уравнений математической физики //ДАН СССР, 1979. -С.264-268.
- [21] Жумагулов Б.Т. Математическое обоснование некоторого класса разностных схем типа дробных шагов.- Алма-Ата, 1994.-17 с.-(Препринт/ ИА РК.№9).
- [22] Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных параболических уравнений в полярных координатах. //Численные методы технико-экономических задач / Сб. научных трудов.-Казань, Изд. КГУ, 1971. -С.51-57.
- [23] Дьяконов Е.Г. Разностные методы решения краевых задач. -М.: Изд-во МГУ, выпуск 2, 1972. -227 с.
- [24] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. -М.: Мир, 1981.-408 с.
- [25] Султангазин У.М. Метод сферических гармоник и дискретной модели в задачах кинетической теории переноса. -Алма-Ата: Наука, 1979. -268 с.
- [26] Смагулов Ш. К теории аппроксимации уравнений гидродинамики //Численные методы в механике жидкости / Сб. научных трудов.- Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1975. -С.123-134.

- [27] Смагулов Ш., Искендерова Д. Математические вопросы модели магнитной газовой динамики. - Алматы: Гылым, 1998. - 165 с.
- [28] Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. //J.of Comp.Phys.-1967.-vol.2,-P.12-26.
- [29] Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface //Phys.of Fluids. 1965. -vol.8, №12.-P.2182-2189.
- [30] Владимиров Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости //Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. -Новосибирск, 1966. - С.29-35.
- [31] Temam R. Une methode d' approximation de la solution des equations de Navier- Stokes //Bull.Soc. Mathem. de France. 1968,-vol.96,№2.-P.115-152.
- [32] Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. -1975.-Т.15,№1. -С.197-207.
- [33] Кобельков Г.М. О методах решения уравнений Навье-Стокса //ДАН СССР.-1978. -Т.243,№4.-С.843-846.
- [34] Смагулов Ш.С., Кузнецов Б.Г. О сходящихся схемах дробных шагов для трехмерных уравнений Навье-Стокса // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск,-1984. -Т.15,№2. -С.69-80.
- [35] Абрашин В.Н., Лапко С.Л. Об одном классе разностных схем решения уравнений Навье-Стокса. //Дифференциальные уравнения. -1992. -Т.28, №7, -С.1154-1167.
- [36] Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Кузнецов Б.Г. Исследование сходимости экономических конечно-разностных схем уравнения Навье-Стокса в переменных (u, v, p) // Моделирование механики. Новосибирск.-1992.-Т.6(23),№2. -С.25-57.

- [37] Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я. О сходящихся разностных схемах для уравнений Навье-Стокса // Численный метод механики сплошной среды. -Новосибирск, ВЦ СО АН СССР.-1971. -№1.-С. 55-73.
- [38] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. -М.: Изд-во МГУ, 1991. -156 с.
- [39] Коновалов А.Н., Коробицына Ж.А. Моделирование краевых условий в задачах фильтрации с помощью метода фиктивных областей//Тр. III Всесоюзн. семинара "Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости". -Новосибирск, -1977. -С.115-120.
- [40] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. -М.: -ИЛ. -Т.2, 1961. -555 с.
- [41] Саульев В.К. Об одном методе автоматизации решения краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах //ДАН СССР. -1962. -Т.142,№3. -С.497-500.
- [42] Саульев В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей//Сиб.матем.журнал. -1963.-Т.4,№4. -С.912-926.
- [43] Ривкинд В.Я. Об оценках скорости сходимости решения разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и об одном численном методе решения задачи Дирихле //ДАН СССР, -1963.-Т.49,№6.-С.1264-1267.
- [44] Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики //ЖВМ и МФ.-1964.-Т.4,№3. -С.449-465.
- [45] Mignot A. Methodes d'approximation des solutions de problems aux limites //Rend. del sem. Mat. della Univ. di Padova. -1968. -11.

- [46] Копченов В.Д. Приближение решения задачи Дирихле методом фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. -1968. -Т.4, №1.-С.151-164.
- [47] Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. -1967. -Т.3, №4.
- [48] Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды/ Сб. научн. тр.-Новосибирск, -1973. -Т.4, №2.-С.109-115.
- [49] Бугров А.Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Труды V Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. -Новосибирск, 1978. -С.24-36.
- [50] Бугров А.Н., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье-Стокса // Труды 6-го Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. -Новосибирск, 1978. -С.45-57.
- [51] Бугров А.Н., Смагулов Ш. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнения Навье-Стокса // Математические модели течения жидкости /АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. -Новосибирск, 1978. -С.79-89.
- [52] Бугров А.Н. Обоснование метода фиктивных областей на конечно-разностном уровне // Материалы XIV Всесоюзной студенческой конференции. Математика. -Новосибирск, 1976. -С.19-25.
- [53] Бугров А.Н. Итерационные схемы решения сеточных уравнений, возникающие в методе фиктивных областей // Численный анализ/ Сб. научных тр. -Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1978. -С.10-23.
- [54] Бугров А.Н. Метод фиктивных областей в уравнениях относительно функции тока для вязкой несжимаемой жидкости. -Новосибирск, 1977.-(Препринт /АН СССР. Сиб. отд-ние. ИМ).

- [55] Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнении Навье- Стокса. -Новосибирск, 1979. - (Препринт /АН СССР. Сиб.отд-ние. ВЦ; №68).
- [56] Смагулов Ш.С., Орунханов М.К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях //ДАН СССР. -1981. -Т.260, №5, -С. 1078-1082.
- [57] Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил //Численные методы механики сплошной среды / Сб.научных тр. -Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972. -Т.3, №5. -С.52-67.
- [58] Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Щербак В.И. Метод фиктивных областей в плоских статических задачах теории упругости //Численные методы механики сплошной среды / Сб. научных тр. -Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974, -Т.5,№1.- С.20-30.
- [59] Утегенов К. Обоснование метода фиктивных областей для задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости на конечно-разностном уровне // Известия АН КазССР, серия физико-математическая, Алма-Ата, 1980.-№3. -С.80-83.
- [60] Вабищевич П.Н., Вабищевич Т.Н. Прямые методы численного решения плоских стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости.-М.: 1982.-13 с. (Препринт/ ИПМ АН СССР, №111).
- [61] R. Glowinski, and T.W. Pan, A.J.Kearnsley, J.Periaux. Numerical simulation and optimal shape for viscous flow by a fictitious domain method // International journal for numerical methods in fluids.-1995.-Vol. 20,-P.695-711.
- [62] Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Некоторые вопросы итерационных методов // Вычислительные методы линейной алгебры. -Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. -С.30-50.
- [63] Кузнецов Ю.И.Мапокин А.М. Матричный аналог метода фиктивных областей. -Новосибирск,1974. (Препринт/ ВЦ СО АН СССР).

- [64] Ильин В.П., Короткевич В.А. О решении уравнений Пуассона в прямоугольных областях // Численные методы механики сплошной среды / Сб. научных тр. - Новосибирск, 1976. - Т.7, №7. - С.30-44.
- [65] Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка. - Киев (Деп. в ВИНТИ, 1981, №245581).
- [66] Николаев Н.И. Метод фиктивных областей в задачах на собственные значения // Численные методы механики сплошной среды / Сб. научных тр. - Новосибирск, 1979. - Т.11, №6. - С.105-112.
- [67] Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: Гостехиздат, 1948. - Т.1-5.
- [68] Соболев С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости // ДАН СССР. - 1936. - Т.4. (XIII), №6. - С.235-238.
- [69] Михлин С.Г. Об алгоритме Шварца // ДАН СССР. - 1951. - Т.77, №4. - С.569-571.
- [70] Годунов С.К. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971. - 416 с.
- [71] Lions P.L. On the Schwarz Alternating Method // Proceedings of the First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. - SIAM, Philadelphia, - 1988. - P. 1-42.
- [72] Кузнецов Ю.А. Вычислительные методы в подпространствах // Вычислительные процессы и системы. Вып 2. - М.: Наука, 1985. - С.265-350.
- [73] Польский Б.С. Об одном методе решения эллиптических разностных уравнений // ЖВМ и МФ. - 1981. - Т. 21, №1. - С.29-34.
- [74] Miller K. Numerical analogs to the schwarz alternating procedure // Numer. Math., - 1965, 7, - P.91-103.

- [75] Вабищевич П.Н. Разностные схемы декомпозиции расчетной области при решении нестационарных задач // Журн.вычисл.матем. и мат.физ. -1989.-Т.29,№12. -С.1822-1829.
- [76] Кацнельсон В.Э., Меньшиков В.В. Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца //Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во ХГУ,-1973. Вып. 17. -С.206-215.
- [77] Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе // М.: Отдел. вычисл. матем. АН СССР, 1983
- [78] Лебедев В.И., Агошков В.И. Вариационные алгоритмы метода разделения области. М.: 1983. -(Препринт/ ОМ АН СССР: №54).
- [79] Агошков В.И., Лебедев В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах //Вычисл. процессы и системы. М.: Наука, -1985. Вып.2. -С.173-226.
- [80] Дьяконов Е.Г. Об одном способе решения уравнения Пуассона. //ДАН СССР, -1962,-Т.143,№1,-С. 21-24.
- [81] Меллер Н.А., Пальцев Б.В., Чечель И.И. О быстром итерационном методе с разделением на подобласти решения краевых задач для эллиптического с параметром уравнения второго порядка // ЖВМ и МФ. -1996. -Т.36, №10. -С.26-45.
- [82] Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // ЖВМ и МФ. -1967.-Т.7, №5.-С.1032-1059.
- [83] Прокопов Г.П. Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета координатных отображений. -М.; 1970. - 29 с.-(Препринт / АН СССР.ИПМ; №10).
- [84] Прокопов Г.П. О расчете разностных сеток, близких к ортогональным, в областях с криволинейными границами. -М., 1974.-36 с. -(Препринт/ АН СССР. ИПМ; №17).

- [85] Данаев Н.Т. Об одной возможности численного построения ортогональных сеток // Числен.методы механ.сплошной среды. -Новосибирск, -1983.-Т.14,№3.-С.42-53.
- [86] Данаев Н.Т. Об одном способе построения криволинейных сеток, сгущающихся в области больших градиентов // Числ.методы механ.сплошной среды.-Новосибирск, -1979.-Т.10.-С.60-74.
- [87] Barfield W.D. Numerical method for generating orthogonale curvilinear mesher // Journ. of Comput. Physics, -1970, -Vol.5, №1. -P.23-47.
- [88] Вабищевич П.Н. Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики // ЖВМ и МФ.-1989.-Т.29,№6.-С.902-914.
- [89] Christov C.I. A method for generating orthogonal coordinate meshes with certain optimal features // Юбилейная научная сессия. ИКХ Варна, 1981.43-1-43-5.
- [90] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation, foundations and applications, -1985, New York, etc.: Elsevier.
- [91] Hymeno R.A. A study of aerodynamic characteristics of automobiles using Navier-Stokes calculation of airflow //Trans. European CONVEX Automotive Symp. Oct.24.1990, Munich, Germany.
- [92] Braaten M.E., Shyy W. Comparison of iterative and direct solution methods for viscous flow calculation in body-fitted coordinates // International Journal For Numerical Methods in Fluids, -1986,-Vol.6, -P.325-349.
- [93] Kwak D., Chang J.L., Rogers S.E., Rosenfeld M. Three dimensional incompressible Navier-Stokes computations of internal flows // IMACS Ann. Comput. And Appl. Math., -1989, -Vol.1, -P.181-186.

- [94] Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задача и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. - Ленинград: "Судостроение", 1989.
- [95] Грабарник С.Я., Цепов Д.С. Численный метод расчета вязкого течения в трехмерном канале произвольной формы // Математическое моделирование. -1998. -Т.10, №10. -С.103-111.
- [96] Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток // Числ.методы механ.сплошной среды.-Новосибирск,-1977.-Т.8,-№4.-С.157-163.
- [97] Данаев Н.Т.,Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О методе подвижных координат в газовой динамике // Проблемы математической физики и вычислительной математики. -Москва, Наука, 1977.-С.107-115.
- [98] Napolitano M., Orlandi P. Laminar flow in a complex geometry a comparison// Numerical Methods in fluids,-1985. - Vol.5. -P.667-683.
- [99] Roache P. Scaling of high Reynolds number weakly separated channel flows// Sympasium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows. 1981.
- [100] Alfrink B.J., Officier M.J., Vreugdenhil and Wind H.G. Applications in hydraulies of a curvilinear finite difference method for the Navier- Stokes equations // Proc. Int. Conf.Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, Scattle. 1983.
- [101] Viollet P.L., Benque J.P. and Goussebaile J. Two-dimensional numerical modelling of non isothermal flows for unsteady thermal- hydraulic analysis. Rapport E.D.F. -D.E.R. He 44. 82.10 et He 44.82.08.
- [102] Huffenus J.P. and Khaletzky D. A finite element method to solve the Navier-Stokes equations using the method of characteristics // Int. journ. numer. methods fluids. -1984. 4. - P. 247-269.
- [103] Napolitano M. Efficient ADI and spline ADI methods for the steady state Navier-Stokes equations // Int.j.numer. methods fluids. -1984.4. -P.1101-1115.

- [104] Идельчик И.Е. Аэродинамика технологических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983.-351 с.
- [105] Попов Е.К. и др. Вопросы исследования реакторов с неподвижным слоем катализатора/ Попов Е.К., Смирнов Е.В., Абаев Г.Н., Штерн П.Г., Турунтаев С.В., Лычагин В.Ф.// Аэродинамика химических реакторов. -Новосибирск, -1976.-С.65-70.
- [106] Табунщиков И.П. Поле скорости газа в шахтных известковых печах // ЖПХ. -1956. №1. -С.32-40.
- [107] Сопыряев Ю.В., Остапенко В.А., Липкинд В.Я. Газораспределение в аппаратах с неподвижным слоем катализатора при центральном вводе реакционной смеси // -Аэродинамика химических реакторов. -Новосибирск, ЦК СО АН СССР. СКТБ катализаторов МХП. -1976. -С.40-48.
- [108] Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. -Новосибирск, 1988. -166 с.
- [109] Мясников В.П., Котелкин В.Д. Гидродинамическая модель химического реактора с неподвижным слоем катализатора // Аэромеханика. -М.: Наука. -1976. -С.307-316.
- [110] Гольдштик М.А., Лебедев А.В. Клапанный эффект в зернистом слое // Инж.физ. журнал. -1978. -Т.34, №3. -С.389-393.
- [111] Вайсман А.М., Гольдштик М.А. Динамическая модель движения жидкости в пористой среде // Изв.АН СССР. Сер.-МЖГ.-1978. №6. С.89-95.
- [112] Рудаков А.И., Щепановская Г.И. Моделирование гидродинамики в реакторе с пористым слоем. -Красноярск, 1980. -40 с. -(Препринт / АН СССР. Сиб.отд. Вычисл.центр; №24).
- [113] Герасимов В.П., Демешев Р.С., Ионкин А.А., Чурбанов А.Г. Численное исследование гидродинамики и теплообмена в пористых средах. -М.:1987.-18 с. (Препринт / АН СССР. ИПМ).

- [114] Ершин Ш.А., Жапбасбаев У.К., Балакаева Г.Т. Теория и расчет аппаратов аппаратов каталитической очистки.- Алматы: Казак университети. 1997.-201 с.
- [115] Аэров М.Э., Тодес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968.
- [116] Schwartz C.E., Smith J.M. Ind.and Eng.Chem. -1953.-45.№6.-P.1029.
- [117] Blottner F.G. Influence of boundary approximations and conditions on finite- difference solutions // Journ. of Comput. Physics. -1982.-48.-P.246-269.
- [118] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,II. -М.: Наука,1973.-536 с.
- [119] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1.-М.: Физматгиз, 1965.583 с.
- [120] Дж.С.Слеттери. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. М.: Энергия,1978.
- [121] Ergun S. Fluid flow through packed columns. -Chem.End.Prog., 1952,48,№2, P.89-94.
- [122] Ширко И.В. Численные исследование течений в гранулированных средах // Численное моделирование в аэрогидродинамике. -М.: 1986.-С.
- [123] Воеводин А.Ф., Юшкова Т.В. Численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса в замкнутых областях на основе метода расщепления.// Сибирский журнал вычислительной математики.-1999.-Т.2, №4. - С.855-859.
- [124] Мухамбетжанов А.Т., Отелбаев М.О., Смагулов Ш.С. Об одном методе фиктивной области для нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии, Новосибирск, -1998, -Т.3, №4.-С.41-64.

- [125] Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. - Алматы, Гылым, 1996г.
- [126] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, 1984. - 520 с.
- [127] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.
- [128] Сахаев Ш. Оценка решения одной неопределенной параболической начально-краевой задачи // Тр. МИАН СССР. - 1975. - Т. СХ XVII. - С. 58-75.
- [129] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 305 с.
- [130] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск, 1967. - 197 с.
- [131] Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. - Новосибирск: Наука, 1981. - 303 с.
- [132] Кузнецов Б.Г., Мошкин Н.П., Смагулов Ш.С. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах сложной геометрии при задании перепадов давления // Числен. методы механ. сплошной среды. Новосибирск, - 1983. - Т. 14, №5. - С. 87-99.
- [133] Рагулин В.В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора // Динамика сплошной среды. - Новосибирск, - 1976. - Вып. 27. - С. 78-92.
- [134] Рагулин В.В., Смагулов Ш.С. О гладкости решения одной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, - 1980. - Т. 11, №4. - С. 113-121.
- [135] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

- [136] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1989. -608 с.
- [137] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.-М.: Энергоатомиздат, 1984.-152 с.
- [138] Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М.: Мир, 1972.-587 с.
- [139] Номофилов Е.В., Пирогов Э.П., Тревгода В.М. Анализ численных методов моделирования задач гидродинамики. -Обнинск, 1983.-30 с. -(Препринт / ФЭИ; ФЭИ -1400).
- [140] Тарунин Е.Л. О выборе аппроксимационной формулы для вихря скорости на твердой границе при решении задач динамики вязкой жидкости // Численные методы механ.сплошной среды. -Новосибирск, -1979. -Т.9,№7.-С.97.
- [141] Брайловская И.Ю., Кускоба Т.В., Чудов Л.А. Разностные методы решения уравнений Навье-Стокса // Вычислительные методы и программирование. -М.: Из-во МГУ, -1968.- Вып.ХІ.-С.3-18.
- [142] Вабищевич П.Н. Реализация краевых условий при решении уравнений Навье-Стокса в переменных "функция тока - вихрь скорости" // ДАН СССР.-1983.-Т.273, №1.С.22-26.
- [143] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1976.-256 с.
- [144] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.-512 с.
- [145] Бессонов О.А., Брайловская В.А., Ру Б. Численное моделирование трехмерного сдвигового течения в полости с движущимися крышками// Известия РАН. МЖГ.-1998,№3, -С.41-49.
- [146] Госмен А.Д., Пав В.М., Ранчел А.К., Сполдинг Д.Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. -М.: Мир, 1972.-324 с.

- [147] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1965.-506 с.
- [148] Демченко Л.И., Лычман В.В. Попеременно-треугольный метод решения разностной задачи Неймана в прямоугольнике.
- [149] Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Модифицированный вариант попеременно-треугольного метода. //ЖВМ и МФ.-1976.-Т.16, №5.
- [150] Лебедев В.И., Финогенов С.Ф. ЖВМ и МФ.-1973.-Т.13,№1.
- [151] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.-М.:Наука, 1988, -333 с.
- [152] Richards C.W., Crane C.M. Pressure marching schemes that work // Int. Journ.Numer. Methods. Engng. 1980.-Vol.15.№4.-P.599-610.
- [153] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло-и массообмена. -М.: Наука,1984.-286 с.
- [154] Баяковский Ю.М., Галактионов В.А., Михайлова Т.Н. Графор. Графическое расширение фортрана.-М.: Наука,1985.-288 с.
- [155] Данаев Н.Т.,Темирбеков Н.М. Численное моделирование гидродинамики вязкого газа в средах с пористой структурой// Численные аналитические методы решения краевых задач/Сб.научн.тр.- Алма-Ата,КазГУ, 1986.-С.47-51.
- [156] Темирбеков Н.М. Численное моделирование гидродинамики вязкого газа в канале с пористой вставкой// Теория функций уравнения математической физики и их приложения/Сб.научн.тр. -Алма-Ата, КазГУ, 1988. -С.54-58
- [157] Темирбеков Н.М. Приближенный метод решения модели вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричной трубе с внутренним сопротивлением// Тезисы II республиканской конференций по проблемам вычислительной математики и автоматизации научных исследований. -Алма-Ата, 1988. -С.98

- [158] Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М., Смагулов Ш.С., Жумагулов Б.Т. О некоторых численных методах решения уравнений Навье-Стокса // Тезисы докладов Школы молодых ученых. "Численные методы механики сплошной среды". - Красноярск, 1989.
- [159] Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Численное решение уравнений Навье-Стокса с разрывными коэффициентами. - Красноярск, 1989. - (Препринт/АН СС-СР.СО.ВЦ: №15).
- [160] Smagulov Sh., Gumagulov B.T., Danaev N.T., Temirbekov N.M. Numerical methods of solution of Navier-Stokes equations in intricate regions. III international seminar on flame structure. September 18-20, Alma-Ata, -P 8-18.
- [161] Темирбеков Н.М., Алибиев Д. Численный расчет течения вязкой несжимаемой жидкости через пористые среды методом фиктивных областей. - Алматы. (Депонирование КазНИ-ИНКИ, 27.10.92, №3885 -Ка 92).
- [162] Темирбеков Н.М. Метод разделения области для решения уравнения Навье-Стокса с быстроменяющимися коэффициентами // Тезисы конференции конкурса молодых ученых и специалистов по математике и механике. 25-26 марта 1993 года.
- [163] Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Численное решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в каналах с пористой вставкой // Прикладная механика и техническая физика. -Новосибирск, -1995.-Т.36, №5.-С.21-29.
- [164] Жумагулов Б.Т., Темирбеков Н.М. Численное моделирование гидродинамики нефти в прискважинной зоне пласта // Тезисы международной научно-технической конференции, -Актау:Казахстан, 22-24 мая, 1996.
- [165] Сулейменова Б., Темирбеков Н.М. Численное решение уравнения движения жидкости через пористые среды альтернирующим методом Шварца // Тезисы международной научно-технической конференции, 22-24 мая, 1996 г., Актау, Казахстан.

- [166] Темирбеков Н.М. Об одном методе численного решения уравнений Навье-Стокса //Тезисы докладов I-съезда математиков Казахстана, 11-14 сентября, 1996 г.,Шымкент.
- [167] Темирбеков, Н.М.,Жумагулов Б.Т.,Байгелов К.Ж. Численное моделирование разработки нефтяных пластов // Механика и моделирование процессов технологии. -1996.№1.-С 16-20.
- [168] Темирбеков Н.М.,Жумагулов Б.Т.,Сулейменова Б. Моделирование гидродинамики в пористых средах методом разделения области.Алматы.1996.-(Препринт/ИА РК; №18).
- [169] Жумагулов Б.Т.,Темирбеков Н.М. Методика нахождения основных технологических показателей нефтедобычи // Нефть и газ Казахстана (приложение к журналу "Доклады Министерства науки-Академии наук Республики Казахстан") 1997.№2.-С47-51.
- [170] Жумагулов Б.Т.,Темирбеков Н.М. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в пористых средах сложной формы // Тезисы международной конференции "Передовые технологии на пороге XXI века", посвященная 145-летию со дня рождения В.Г.Шухова 'ISAT' - Москва,Россия,1998.5-9 октября, -С.585-587.
- [171] Темирбеков Н.М., Смагулов Ш.С. Об одном приближенном методе решения уравнений Навье-Стокса в естественных переменных //Материалы II- Казахстанско-Российской научно-практической конференции "Математическое моделирование научно технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности" -Алматы,1998.24-25 сентября,-С.146-148.
- [172] Темирбеков Н.М. Численный метод решения уравнений естественной конвекции в двухсвязной области //Материалы II- Казахстанско-Российской научно-практической конференции "Математическое моделирование научно технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности".-Алматы,1998.24-25 сентября,-С.86-87.

- [173] Темирбеков Н.М., Каупынбаев Д.Т. Обоснование метода фиктивных областей для уравнений свободной конвекции в переменных функции тока и вихря скоростей // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. -1998. №11. -С.127-130.
- [174] Темирбеков Н.М., Каупынбаев Д.Т. Численное решение уравнений естественной конвекции в двухсвязной области.- Алматы.(Деп.в КазНИИНКИ, 6.05.98, №8304-Ка98).
- [175] Жумагулов Б.Т., Темирбеков Н.М. Численный метод решения уравнений естественной конвекции в двухсвязной области // "Нефть и газ Казахстана".-1999. №1(5) -С.47-55.
- [176] Темирбеков Н.М., Сулейменова Б. Об одном методе численного решения краевой задачи магнитной гидродинамики// Вестник КазГУ, серия математика, механика, информатика.-Алматы, -1998. №9 -С.141-148.
- [177] Темирбеков Н.М., Сулейменова Б. Об одном методе численного решения краевой задачи магнитной гидродинамики// Материалы Казахстанско-Российской научно-практической конференции "Математическое моделирование научно-технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности".-Алматы,-1997.16-17 сентября,-С114-115.
- [178] Темирбеков Н.М., Жумагулов Б.Т. Об одном методе решения уравнений естественной конвекции в двухсвязной области// Материалы научно-технической конференции, посвященной 100-летию академика К.И.Сатпаева "Академик К.И.Сатпаев и его вклад в развитие и становление инженерного дела в Казахстане. -Жезказган, -1999.-С.576-584.
- [179] Темирбеков Н.М., Баилова А.А. Численное моделирование течения вязкой жидкости в пористых средах// Материалы международной научно-практической конференции "Проблемы вычислительной математики и информационных технологий". -Алматы, -1999.-С.161.

- [180] Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Численного моделирование трехмерного течения в области с криволинейной границей //Материалы международной научно-практической конференции "Проблемы вычислительной математики и информационных технологий". -Алматы, 1999. -С.331-332.
- [181] Темирбеков Н.М., Смагулов Ш.С.,Камаубаев К.С. Об одном приближенном методе решения уравнения Навье-Стокса в естественных переменных// Доклады НАН РК. - 1999.№5,-С.10-15.
- [182] Zhumagulov B.T., Temirbekov N.M. Numerical solition of natural convection in doubleconnected domain// Доклады НАН РК. -2000.№1.-С.5-13.
- [183] Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М.,Камаубаев К.С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течений вязкой жидкости. //Сибирский журнал вычислительной математики.-Новосибирск. -2000.-Т.3, №1.-С.57-71.
- [184] Жумагулов Б.Т.,Темирбеков Н.М.,Баилова А.А. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости через пористые среды// Нефть и газ.-1999.№2(7). -С.91-96.
- [185] Темирбеков Н.М. Численное моделирование трехмерного течения в области с криволинейной границей // Известия АН РК.-2000. №1(209).-С.64-69.
- [186] Смагулов Ш.С.,Данаев Н.Т.,Темирбеков Н.М. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задачах гидродинамики с помощью метода фиктивных областей // Доклады Академии Наук России.-2000.-Т.374,№3.-С.333-335.
- [187] Темирбеков Н.М.,Нурбекова А.Х. Численное моделирование осесимметричного течения методом фиктивных областей// Вестник КазГУ, серия математика,механика, информатика.-2000.№1(20).-С.120-127.

- [188] Smagulov Sh, Zhumagulov B.T., Temirbekov N.M. Numerical modeling of a liquid current in area with curve linear border by a method of fictitious areas// New technologies in Islamic Countries: Presentation of International scientific and technical conference (27- 30 June), -Almaty, EARX,-1999.-P.201-206.
- [189] Темирбеков Н.М., Байлова А.А. Численное моделирование течения вязкой теплопроводной жидкости в криволинейной области с пористой вставкой // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика.-2000. №2(21). -С.143-150.
- [190] Темирбеков Н.М., Жумагулов Б.Т. Итерационный метод для численного решения вспомогательной задачи метода фиктивных областей// Вестник Кыргызского государственного национального университета. Труды международной научной конференции "Проблемы математики и информатики в XXI веке". Серия 3. Выпуск 4. -С.249-251.
- [191] Темирбеков Н.М. Численное моделирование задач гидродинамики в сложных областях // Электронный вариант тезисов научных мероприятий "Вычислительные технологии-2000". -Новосибирск, Академгородок. 11-15 сентября 2000 года.
- [192] Темирбеков Н.М., Жумагулов Б.Т. Численное моделирование фильтрации нефти в пластах сложной формы//Материалы международной научно-технической конференции "Современные проблемы геофизики, геологии, освоения, переработки и использования углеводородного сырья в Казахстане", посвященная 20-летию основания Атырауского института нефти и газа. -Атырау, 2000. -С.541-546.

Содержание

Введение.....	4
Раздел 1. Моделирование краевых условий в задачах гидродинамики с помощью метода фиктивных областей.....	
1.1. Линейное стационарное уравнения Стокса.....	18
1.2. Моделирование граничных условий для полного напора и давления стационарного уравнения Навье- Стокса.....	25
1.3. Математическое моделирование краевых условий для давления и полного напора в нестационарных уравнениях Навье- Стокса методом фиктивных областей.....	36
1.4. Метод конечных разностей для уравнений Навье- Стокса вязкой несжимаемой жидкости.....	48
1.4.1. Итерационные методы решения стационарных уравнений Стокса.....	48
1.4.2. Итерационные методы для решения стационарных уравнений Навье- Стокса.....	54
Раздел 2. Метод разделения области для численного решения уравнений Навье- Стокса с разрывными коэффициентами.....	
2.1. Моделирование задач гидродинамики в пористых средах методом разделения области. Постановка задачи.....	61
2.2 Описание конечно-разностной схемы и учет граничных условий.....	62
2.3 Априорные оценки для разностной задачи.....	65
2.4 Исследование аппроксимационных свойств.....	71
2.5 Сходимость конечно-разностной задачи.....	75
2.6 Схема реализации метода расщепления.....	78
2.7 Численный аналог альтернирующего метода Шварца.....	79
2.8 Численные результаты течения вязкой несжимаемой жидкости в пористых средах	82
Раздел 3. Тепло- массообмен течения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости через пористую среду в областях со сложной геометрией.....	
	87

3.1 Постановка задачи и исходные дифференциальные соотношения в ортогональной криволинейной системе координат.....	88
3.2 Метод построения ортогональной криволинейной сетки.....	91
3.3 Описание конечно- разностных соотношений.....	93
3.4 Сравнение полученных результатов с решением тестового примера Роуча.....	95
3.5 Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду в областях со сложной геометрией.....	104
3.6 Численное моделирование конвективного тепло- массообмена течения вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду.....	115
Литература.....	122

Подписано в печать 14.09.2000.
Формат 60x84/16. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,31. Усл. кр.-от. 8,37.
Уч.-изд. л. 6,56. Тираж 500 экз. Заказ 37.

Типография КазгосИНТИ.
480096, г. Алматы, ул. Богенбай батыра, 221