Костанайский
инженерно-экономический
университет им. М. Дулатова

Кужукеев Ж.М.

Математический анализ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2$$

Костанай 2015

V

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Костанайский инженерно-экономический университет им. М.Дулатова
Кафедра Энергетики и машиностроения

Ж. М. Кужукеев

Математический анализ
(для студентов информационных специальностей)

Учебное пособие

Костанай 2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
К88

Рекомендовано к опубликованию Ученым советом Костанайского инженерно-экономического университета им. М. Дулатова (протокол № 12 от 26 мая 2015 года)

Рецензенты:
Калжанов М.У. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и математики Костанайского государственного университета им. А.Байтурсынова

Жикеев А. А. – кандидат технических наук, и. о. доцента кафедры «Информационных технологий и автоматизации» Костанайского инженерно-экономического университета им. М.Дулатова

Автор: Кужукеев Женис-Нуры Мурзатаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Костанайский инженерно-экономический университет им. М.Дулатова

Кужукеев Ж.М.
К88 Математический анализ (для студентов информационных специальностей): учеб. пособие / Ж.М. Кужукеев - Костанай: КИнЭУ, 2015.- 138 с.

ISBN 978-9965-851-40-7

Учебное пособие содержит программу курса «Математический анализ» для студентов специальностей «Информационные системы» и «Вычислительная техника и программное обеспечение», необходимые теоретические сведения, контрольные материалы, методические указания и примеры решения задач.

Учебное пособие предназначено студентов, преподавателей, слушателей курсов повышения квалификации.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-9965-851-40-7

Содержание

Введение

Математика занимает важное место в формировании специалиста высшей квалификации в области вычислительной техники и информационных технологий, служит теоретической основой для успешного усвоения базовых и специальных дисциплин, которые включены в учебные планы специальностей «Информационные системы» и «Вычислительная техника и программное обеспечение».

Курс «Математический анализ» включает в себя следующие разделы: дифференциальное исчисление функции одной переменной, интегральное исчисление функции одной переменной, дифференциальное исчисление функции нескольких переменных, дифференциальные уравнения, кратные интегралы, ряды. Математический анализ является одной из важных частей математики и служит фундаментом математического образования специалиста.

Настоящее пособие по дисциплине «Математический анализ» составлено на основе типовой программы этого курса, отражает требования, предъявляемые к математическому образованию современного специалиста в области вычислительной техники и информационных технологий, и предназначено для студентов очной и заочной форм обучения, в том числе обучающихся по дистанционной технологии.

Учебная программа

1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения

Числовые множества. Определение и способы задания функции. Пределы числовых последовательностей и функций. Свойства пределов числовых последовательностей и функций. Раскрытие простейших неопределенностей. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Эквивалентные функции.

Непрерывность элементарных функций. Разрывы функций. Теорема Вейерштрасса.

Производная, ее геометрический смысл. Правила дифференцирования. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции. Производная и дифференциал сложной функции. Производные высших порядков. Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения. Теорема о дифференцируемых в интервале функций. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя. Формула Тейлора. Интервалы монотонности и выпуклости, вогнутости функций. Исследование функций и построение графиков.

2. Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл. Основные методы вычисления неопределенного интеграла. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование основных классов элементарных функций. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Определенный интеграл и методы его вычисления. Геометрические приложения определенного интеграла. Приложения определенного интеграла к решению задач механики и физики.
Несобственные интегралы. Приложения несобственных интегралов.

3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Дифференцирование сложных и неявных функций. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанной производной. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент функции. Экстремум функции двух переменных. Применение функции многих переменных.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные цели. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задачи Коши. Дифференциальные уравнения высших порядков. Однородные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения. Метод Лагранжа. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

5. Кратные интегралы и их приложения

Двойной и тройной интегралы. Вычисление кратных интегралов путем сведения к повторным интегралам. Геометрический смысл двойного интеграла. Механический смысл тройного интеграла.

Замена переменных в кратных интегралах. Двойной интеграл в полярных координатах. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле. Геометрические и механические приложения кратных интегралов.

6. Ряды и их применение

Числовые ряды. Сходимость ряда. Критерий Коши. Признаки сходимости положительных числовых рядов. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Равномерная и правильная сходимость. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости степенных рядов. Теорема Абеля. Разложение функций в ряд Тейлора. Применение степенных рядов.

1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения

1.1. Числовые множества и функции

1. Числовые множества

Определение. Множество, элементами которого являются числа, называется **числовым.**

Обозначения числовых множеств:

N – множество натуральных чисел; $N = \{1,2,3,\ldots, n\ldots\}$

Z – множество целых чисел; $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

Q – множество рациональных чисел; $Q = \left\{\frac{m}{n}\right\}$, где $m \in Z$, $n \in N$

Рациональное число является либо целым, либо представляется конечной или бесконечной периодической десятичной дробью. Например, 3/4=0,75; 1/3=0,3333…

I – множество иррациональных чисел

$\sqrt{2}=1{,}4142356\ldots$; $\pi=3{,}14159\ldots$ и т.д.

R – множество действительных чисел. Совокупность рациональных и иррациональных чисел образует множество **R** действительных (вещественных) чисел. Между точками прямой и множеством действительных чисел существует взаимно- однозначное соответствие. То есть **R** = $(-\infty; +\infty)$ - множество действительных чисел (числовая прямая).

***Свойства действительных чисел*:**

1. Множество **R упорядоченное**.

Для любых различных a и b выполняется одно из соотношений: либо $a < b$, либо $b< a$

2. Множество **R плотное**.

Между двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т.е. $a < x < b$

3. Множество **R непрерывное**.

Если множество **R** разбить на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе, тогда существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \leq c \leq b$ $(\forall a \in A,\ \forall b \in B)$. Число с является либо наибольшим числом в классе A, либо наименьшим числом в классе B.

C – множество комплексных чисел.

Между этими множествами существует соотношение: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

Определение. **Окрестностью** точки x_0 на числовой прямой называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0.

γ

2. Функция. Способы задания. Свойства.

Пусть даны два числовых множества X и Y.

Определение. **Функцией** $y = f(x)$ называется правило, по которому каждому значению переменной $x \in X$ ставится в соответствие определенное значение переменной $y \in Y$.

Функция f отображает множество X на множество Y. Множество X называют **областью определения** функции, множество Y – **областью значений**.

Существуют следующие способы задания функции:

1) табличный,
2) аналитический (с помощью формулы или набора формул),
3) графический,
4) словесный (с помощью одного или нескольких предложений).

Определение. **Графиком функции** $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x;y)$, где $y = f(x)$, а x принадлежит области определения функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** в области X, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **монотонной**, если она только возрастающая или только убывающая.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **чётной** если выполняется условие: $f(-x) = f(x)$ и **нечётной**, если $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Оy. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** в области X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. График ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$.

3. Обратная функция

Теорема (*о существовании обратной функции*). Если функция $y = f(x)$ монотонна, то на всей области её значений существует обратная функция $y = f^{-1}(x)$, которая также будет монотонной, при этом характер монотонности не изменяется.

Чтобы найти обратную функцию $y = f^{-1}(x)$, достаточно из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y и поменять x и y местами.

Графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ совпадают, а графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов).

4. Сложная функция

Пусть функция $u = \varphi(x)$ отображает множество X на множество U, а функция $y = f(u)$ отображает множество U в множество Y, тогда $y = f(\varphi(x))$ называется **сложной функцией** или **суперпозицией** функций (**взятие функции от функции**). Она определена на множестве X и отображает его в множество Y. Функция $u = \varphi(x)$ называется промежуточным аргументом.

Пример. Пусть $f(x) = 2x - 1$, $\varphi(x) = 2x + 1$. Составить сложную функцию $f(\varphi(x))$

Решение. Находим $f(\varphi(x)) = 2(2x + 1) - 1 = 4x + 1$

5. Элементарные функции

Элементарными функциями будем называть совокупность всех функций, которые можно получить из основных элементарных функций путем применения к ним арифметических операций (сложения, умножения, деления, вычитания), а также сложные функции, образуемые на их основе.

К основным элементарным функциям относятся: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Контрольные вопросы:

1. Как обозначается множество натуральных чисел?
2. Как обозначается множество целых чисел?
3. Как обозначается множество действительных чисел?
4. Перечислите свойства действительных чисел.
5. Что называется окрестностью точки?
6. Определение функции.
7. Что называется областью определения и областью значений функции?
8. Что называется графиком функции?
9. Способы задания функции.
10. Какая функция называется четной (нечетной)?
11. Какая функция называется возрастающей (убывающей)?
12. Какая функция называется ограниченной?
13. Какая функция называется непрерывной?
14. Какая функция называется монотонной?
15. Какая функция называется обратной? Как найти обратную функцию?
16. Какая функция называется сложной?
17. Перечислите основные элементарные функции.

1.2. Предел и непрерывность функции

1. *Понятие предела*

Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие определенное число a_n, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Другими словами, ***числовая последовательность*** - это функция натурального аргумента: $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами последовательности, а число a_n – *общим членом* или *n- членом* данной последовательности. Последовательность задается формулой его общего члена.

Определение. Число A называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такой номер N зависящий от ε, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\right)$.

Определение. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого наперед заданного положительного числа ε (как угодно малого) можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, входящих в область определения функции, отличных от a и удовлетворяющих условию: $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, где ε - наперед заданное число, а δ - соответствующим образом подобрано.

Функция $f(x)$ не обязательно должна быть определена в точке a, необходимо, чтобы в области ее существования были точки, как угодно близкие к a и отличные от a.

Если $x < a$ и $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называется **левосторонним** (левым) пределом функции.

Если $x > a$ и $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называется **правосторонним** (правым) пределом функции.

Для существования предела функции в точке необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

2. *Бесконечно малая величина*

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Ни одно число, кроме нуля, не может быть отнесено к бесконечно малым величинам.

Свойства бесконечно малой величины:

1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малы при $x \to a$, то сумма и разность этих функций также бесконечно малы при $x \to a$.
2. Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x \to a$, а функция φ(x) ограничена, то их произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть функция бесконечно малая

3. Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x \to a$, то и $-f(x)$ также бесконечно мала при $x \to a$.
4. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть также бесконечно малая величина.
5. Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.
6. Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

3. Бесконечно большая величина

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Никакое постоянное очень большое число не является бесконечно большим.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** при $x \to a$, если в некоторой окрестности точки $x = a$ эта функция ограничена.

Свойства бесконечно большой величины:

1. Бесконечно большая величина предела не имеет.
2. Величина, обратная бесконечно большой есть величина бесконечно малая, т.е. если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.
3. Величина, обратная бесконечно малой есть величина бесконечно большая, т.е если функция f(x) бесконечно мала при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно большая, причем в окрестности точки a функция $f(x)$ в ноль не обращается.
4. Произведение двух бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
5. Отношение бесконечно большой величины к бесконечно малой есть величина бесконечно большая, т.е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b\ (b > 0)$, а предел $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.
6. Сумма двух бесконечно больших величин одинакового знака есть бесконечно большая величина того же знака.
7. Если $k > 0$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = \infty$.

Замечание. Отношение двух бесконечно малых величин (или двух бесконечно больших) может быть величиной или конечной, или бесконечно малой, или бесконечно большой величиной.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых или больших величин часто называется также раскрытием “неопределенности” вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

4. *Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы*

В приводимых теоремах будем считать, что при $x \to a$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы.

Теорема. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$

Теорема. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)$$

Теорема. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю.

Теорема. Если функция имеет предел, то ее можно представить как сумму постоянной, равной ее пределу, и бесконечно малой величины.

Первый замечательный предел: Предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\approx 2{,}72$ - натуральное число.

В приложениях математического анализа большую роль играет показательная функция с основанием *e*. Функция $y = e^x$ называется **экспоненциальной.**

5. *Вычисление пределов*

Примеры: 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^2+x-5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ числитель и знаменатель дроби делим на x^2, где 2-наивысшая степень многочленов. Далее применяем основные теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$

Числитель и знаменатель разложили на множители и сократили на (x-2).

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1})^2-9}{(\sqrt{x-2})^2-2}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\sqrt{2}}{6}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{x-4}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix} arctg5x=y\Rightarrow 5x=tgy \\ y\to 0 \quad при \quad x\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3tgy}{5y}$

Применяя свойства пределов и первый замечательный предел, получаем:

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3tgy}{5y}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{tgy}{y}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{3}{5}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+5}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}}\right\}^{3x+5}=$

$=\ln e^{5\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x}}=\ln e^{15}=15$

6. Непрерывность функции

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке *a***, если она определена в точке ***a*** и её окрестности и существует предел $f(x)$ при ***x***, стремящимся к ***a***, совпадающий со значением функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Определение 2. Функция $y=f(x)$ **непрерывна в точке *a***, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

$\Delta x=x-a$ – приращение аргумента, $\Delta y=f(x)-f(a)$ – приращение функции.

Эти условия выполняются для элементарных функций (выражаемых одной формулой) в точках, в которых они определены, то есть **элементарные функции непрерывны в области их определения.**

Определение. Функция ***y=f(x)*** называется **непрерывной в интервале (*a,b*)**, если она непрерывна в каждой точке этого интервала

Определение. Функция ***y=f(x)*** называется **непрерывной на отрезке [*a,b*]**, если она непрерывна в интервале (a,b) и в точке $x=a$ непрерывна справа ($\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$), а в точке $x=b$ непрерывна слева ($\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$).

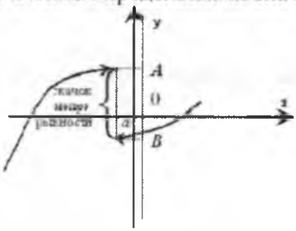
При исследовании функции на непрерывность в точке обычно применяют признак: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$. Если хотя бы одно из равенств нарушается или функция в точке $x=a$ не существует, то функция не будет непрерывной.

7.Точки разрыва функции и их классификация

Определение. Точки, в которых нарушается условие непрерывности функции, называются **точками разрыва.**

Определение. Разрыв функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ называется **разрывом первого рода**, если односторонние пределы справа и слева существуют, но не равны между собой, то есть если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=B$, $A \neq B$, то точка $x = a$ является **точкой разрыва I рода**.

Определение. **Скачком** функции называется абсолютная величина разности между её правым и левым предельными значениям, т.е. $|B - A|$



Разрыв функции I рода.

Определение. Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то говорят, что в точке ***x=a*** функция имеет **разрыв второго рода.**

Пример. Установить является ли функция $y = \dfrac{3x}{x+2}$ непрерывной или разрывной при значениях аргумента $x = -2$ и $x = 3$.

Решение. Определим односторонние пределы функции при $x \to -2$.

$\lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{3x}{x+2} = +\infty$, так как знаменатель стремится к нулю, оставаясь отрицательным,

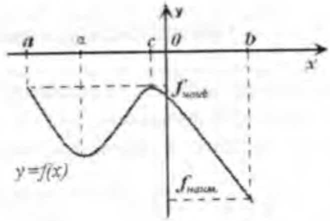
$\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{3x}{x+2} = -\infty$, так как знаменатель стремится к нулю, оставаясь положительным. Таким образом, при $x = -2$ данная функция имеет разрыв второго рода.

При $x = 3$ функция непрерывна, т.к. выполняются все условия непрерывности $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{3x}{x+2} = \lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{3x}{x+2}\Big|_{x=3} = \dfrac{9}{5}$.

8. Свойства непрерывных на отрезке функций

Теорема Вейерштрасса. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

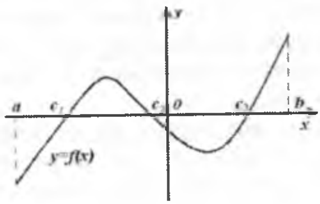
Геометрический смысл данной теоремы:



Достижение непрерывной функцией своего
наибольшего и наименьшего значений.

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то в интервале (a, b) найдется хотя бы одна такая точка $x = c$, в которой функция обратится в нуль: $f(c) = 0$.



Контрольные вопросы:

1. Определение числовой последовательности.
2. Что называется пределом числовой последовательности ?
3. Сформулируйте определение предела функции.
4. Геометрический смысл предела.
5. Какая функция называется бесконечно малой ?
6. Свойства бесконечно малой величины.
7. Какая функция называется бесконечно большой ?
8. Свойства бесконечно большой величины.
9. Назовите основные свойства пределов функций.
10. Напишите формулы первого и второго замечательных пределов.
11. Определение непрерывности функции в точке, на интервале и на отрезке.
12. Определение левостороннего и правостороннего предела функции.
13. Какие точки называются точками разрывом первого рода, второго рода?
14. Свойства непрерывных на отрезке функций.

1.3. Производная функции

1. *Определение производной, её различные интерпретации*

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{или} \qquad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции. Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$.

Физический смысл производной. Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом смысле говорят, что производная определяет скорость изменения функции.

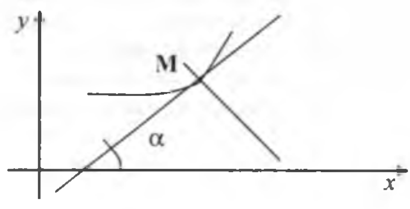
Механический смысл производной. Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная пути S по времени t.

Геометрический смысл производной. Производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.

Экономический смысл производной. Производная от объема выпущенной продукции по времени есть производительность труда; производная от стоимости по количества купленного товара есть цена товара и т.д.

2. *Уравнение касательной и нормали к кривой*

Если $M(x_0\ ,\ y_0)$ - точка касания к графику функции, то угловой коэффициент касательной есть $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $y - y_0 = k(x - x_0)$, можно записать **уравнение касательной:** $y - y_0 = = f'(x_0)(x - x_0)$



Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью к кривой.** Тогда угловой коэффициент нормали $k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Поэтому **уравнение нормали** имеет вид: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

3. Правила дифференцирования. Таблица производных

Правила дифференцирования

1. $y = C \cdot u$, $y' = C \cdot u'$, где $C=const$, $u=u(x)$ - функция.
2. $y=(u \pm v)$; $y' = u' \pm v'$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции.
3. $y=u \cdot v$; $y' = u'v + v'u$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции.
4. $y=\frac{u}{v}$; $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции.

Таблица производных

1. $(C)'= 0$, (C- *const*)
2. $(x^a)' = n \cdot x^{a-1}$

   $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $x' = 1$
3. $(a^x)'= a^x \ln a$

   $(e^x)'= e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

   $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4. Производная сложной и обратной функций

Теорема. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то **производная сложной функции** существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$.

Теорема. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, **производная обратной функции** равна обратной величине производной данной функции, т.е. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

5. Производная неявно заданной функции

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то говорят, что функция задана **в явном виде** (явная функция). Под **неявным заданием** функции понимают задание функции в виде уравнения F(x; y)=0, но неразрешенного относительно y (например, $3y - \ln y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - 6x + 7y - 9 = 0$).

Если неявная функция задана уравнением F(x; y)=0, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x; полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример.

Найти производную, функции y, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение:

Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения $3x^2 + 3 \cdot 3y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$ следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т.е. $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

6. Производная параметрически заданной функции

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t - вспомогательная переменная, называемая параметром.

Производная параметрически заданной функции: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

Формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение:

Находим $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2} = \dfrac{2}{3t}$.

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x.

Действительно: $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{3t}$.

7. Логарифмическое дифференцирование

В некоторых случаях для нахождения производной необходимо заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием.*

Пример. Найти производную функции $y=\dfrac{(x^2+10)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Решение:

Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y=\ln(x^2+10)+\frac{3}{4}\ln(x-1)+x-3\ln(x+5)$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=\frac{1}{x^2+10}\cdot 2x+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+1-3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y': $\quad y'=y\left(\dfrac{2x}{x^2+10}+\dfrac{3}{4(x-1)}+1-\dfrac{3}{x+5}\right)$, т.е.

$$y'=\frac{(x^2+10)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+10}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right).$$

Пример. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение: Применяем логарифмическое дифференцирование

$$\ln y=\left(x^2+1\right)\ln\sin 2x\,,\quad \frac{1}{y}y'=2x\cdot\ln\sin 2x+(x^2+1)\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2,$$

$$y'=2x(\sin 2x)^{x^2+1}\cdot\ln\sin 2x+2(x^2+1)(\sin 2x)^{x^2}\cdot\cos 2x.$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется приращением аргумента и приращением функции?
2. Определение производной функции.
3. Каков геометрический, физический, механический и экономический смысл производной?
4. Таблица производных.
5. Основные правила дифференцирования функции.
6. Сформулируйте основные правила дифференцирования сложной и обратной функций.
7. Записать уравнение касательной.
8. Что называется нормалью к кривой?
9. Записать уравнение нормали.
10. Как найти производную от неявно заданной функции?
11. Как найти производную от параметрически заданной функции?
12. Какую операцию называют логарифмическим дифференцированием?

1.4. Дифференциал функции.
Основные теоремы дифференциального исчисления

1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции, можно записать, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

$f'(x) \cdot \Delta x$ называют **главной частью** приращения функции Δy.

Определение. **Дифференциалом функции** называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

Так как $dx = \Delta x$, то формулу (1) можно записать в виде

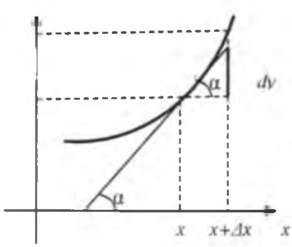
$$dy = f'(x)dx \qquad (2)$$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции, умноженной на дифференциал независимой переменной.

Из формулы (2) следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

2. Геометрический смысл дифференциала функции

Дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции *y=f(x)* в данной точке, когда x получает приращение Δx.



Возьмем на графике функции *y=f(x)* произвольную точку *M(x,y)*. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция *y=f(x)* получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Проведем касательную к кривой *y=f(x)* в точке *M*, которая образует угол α с положительным направлением оси *Ox*, т.е. $f'(x) = tg\alpha$. Из прямоугольного треугольника *MKN* $KN = MN \cdot tg\alpha = \Delta x tg\alpha = f'(x)\Delta x$, т.е. $dy = KN$.

3. Применение дифференциала в приближённых вычислениях

Как уже известно, приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$.

При достаточно малых значениях $\Delta x = x - x_0$

$\Delta y \approx dy$ или $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, откуда

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (3)$$

Эта формула применяется в приближенных вычислениях.

Пример. Найти приближенно $\sqrt[4]{17}$.

Решение: Введем в «игру» функцию $y = \sqrt[4]{x}$. Тогда математическая модель данной задачи звучит следующим образом: **найти приближенно значение функции** $y = \sqrt[4]{x}$ **при** $x = 17$.

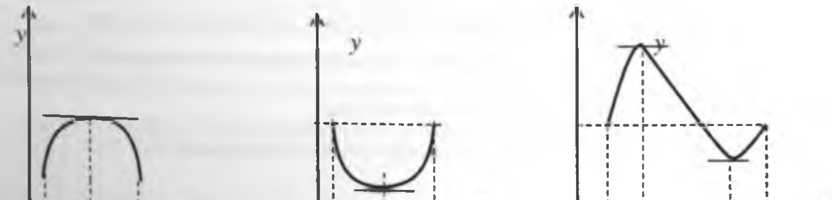
Для решения применим формулу (3), взяв $x_0 = 0$, так как известно точное значение функции в этой точке: $y_0 = f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$. Продифференцируем функцию и найдем значение производной при $x_0 = 16$: $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$,

$y'_0 = \dfrac{1}{32} = 0{,}003125$. Тогда $\sqrt[4]{17} \approx 2 + 0{,}003125 \cdot (17 - 16) = 2{,}003125$.

4. Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.



O a c b x O a c b x O a c_1 c_2 b x

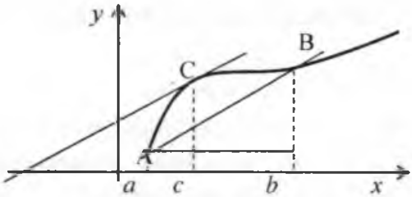
Теорема Коши. Если функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (4)$$

Формулу (4) называют **формулой Лагранжа** или **формулой о конечном приращении**: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a;b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: отношение $(f(b)-f(a))/(b-a)$ есть угловой коэффициент секущей *AB*, а величина $f'(c)$ - угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x = c$, т.е на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна секущей *AB*.



Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

5. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, который основан на применении производных.

Теорема. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$).

Предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, теорему можно применить ещё раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т. д.}$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=1.$

Теорема. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty, \varphi'(x)\neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, которые называют ***основными.*** Неопределенности вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (∞^0), (0^0) сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение $A=f(x)^{\varphi(x)}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциалом функции?
2. Каков геометрический смысл дифференциала?
3. Какая формула применяется в приближенных вычислениях?
4. Записать формулу нахождения дифференциала сложной функции.
5. Сформулируйте теорему Ролля, Коши, Лагранжа.
6. Каков геометрический смысл теоремы Ролля?
7. Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа?
8. Как по правилу Лопиталя раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$?

1.5. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков функции, заданной в явном виде

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$, как правило, также является функцией от x и в определенных случаях называется **производной первого порядка**.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется **производной второго порядка** и обозначается y'' $\left(\textit{или } f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right), \dfrac{dy'}{dx}\right)$.

Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* $y''' = (y'')'$.

Определение. Производной *n*-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной (n-1) порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Производные порядка выше первого называются **производными высших порядков.**

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначаются римскими цифрами или арабскими числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ - производная пятого порядка).

2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Производная S'_t равна скорости точки в данный момент времени: $S'_t = V$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент $t + \Delta t$ - скорость равна $V + \Delta V$, т.е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV. Отношение $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt .

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки M в данный момент времени t: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = a$, $V' = a$.

Но $V = S'_t$. Поэтому $S''_t = a$.

Вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки, т.е. $S''_t = a$.

3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y)=0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего порядка.

Пример. Дана функция y, заданная в неявном виде уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Найти y''.

Решение: 1. Дифференцируем заданное уравнение по x, учитывая, что y зависит от x: $3x^2 + 3y^2y' - 3(y + xy') = 0$;

2. Находим y': $3y'(y^2 - x) = 3y - 3x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$;

3. Дифференцируем y' по x: $y'' = \dfrac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} =$

$$\frac{\left(\dfrac{y-x^2}{y^2-x} - 2x\right)(y^2 - x) - (y - x^2)\left(2y \cdot \dfrac{y - x^2}{y^2 - x} - 1\right)}{(y^2 - x)^2} = \frac{2xy(1 + x^3 + y^3 - 3xy)}{(x - y^2)^3}$$

4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Первая производная y'_x находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. (1)

Найдем вторую производную от функции, заданной параметрически.
Из определения второй производной и равенства (1) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \qquad (2)$$

Аналогично получаем $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$, $y^{(4)}_{xxxx} = \dfrac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \ldots$

Пример. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение: По формуле (1) $y'_x = \dfrac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt.$

Тогда по формуле (2) $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-ctgt)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$

5. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а её аргумент x – независимая переменная. Тогда её первый дифференциал $dy = f'(x)dx$.

Определение. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется её **вторым дифференциалом** (или **дифференциалом второго порядка**) и обозначается $d^2 y$ или $d^2 f(x)$: $d^2 y = d(dy)$.

Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$ Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным: $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2$, т.е.

$$d^2 y = f''(x)dx^2$$

Здесь через dx^2 обозначается $(dx)^2$.

Пример. Найти $d^2 y$, если $y = e^{3x}$.

Решение. Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то имеем $d^2 y = 9e^{3x}dx^2$.

Определение. Дифференциалом *n*-го порядка называется дифференциал от дифференциала (*n*-1)-го порядка: $d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$ или

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

Из определения дифференциалов высших порядков следует другое обозначение производных высших порядков:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Контрольные вопросы:

1. Как найти производные высших порядков функции, заданной в явном виде?
2. Механический смысл производной второго порядка.
3. Как найти производные высших порядков неявно заданной функции?
4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.
5. Как находятся дифференциалы высших порядков?

1.6. Приложения производных первого и высших порядков

1. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Теорема *(достаточное условие возрастания функции).* Функция $y = f(x)$ будет возрастающей на (a,b), если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a,b)$.

Теорема *(достаточное условие убывания функции).* Функция $y = f(x)$ будет убывающей на (a,b), если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a,b)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой **максимума** функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой **минимума** функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) \leq f(x)$.

Определение. Экстремумом функции называется максимум или минимум функции.

Экстремум функции часто называют **локальным** экстремумом, подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0. Значит, функция может иметь экстремум только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции.

Теорема *(необходимое условие экстремума).* Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела экстремум, необходимо, чтобы $f'(x_0) = 0$ или не существовала.

Определение. Точка x_0, в которой первая производная равна нулю или не существует, называется **критической точкой первого рода** или **стационарной точкой.**

Таким образом, касательная к графику функции $y = f(x)$ в критической точке x_0 параллельна оси OX ($f'(x_0) = 0$) или оси ординат ($f'(x_0) = \infty$), либо в этой точке нет определенной касательной.

Если в точке x_0 достигается экстремум, то эта точка критическая, но не каждая критическая точка является точкой экстремума. То есть в критических точках функция **может** иметь экстремум.

Теорема *(первое достаточное условие экстремума).* Функция $y = f(x)$ в точке x_0 будет иметь максимум, если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-”, и функция будет иметь минимум, если при переходе через критическую точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с “-” на “+”. Если $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Теорема *(второе достаточное условие экстремума)*. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 будет иметь максимум, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$ и минимум, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$.

Схема исследования функции на экстремум с помощью первого достаточного условия:

1. Находим область определения функции
2. Находим производную $y' = f'(x)$
3. Находим критические точки, в которых производная $y'=0$ или не существует
4. Разбиваем область определения функции критическими точками на интервалы; определяем знаки производной y' слева и справа от каждой критической точки; делаем вывод о наличии экстремумов.
5. Вычисляем экстремальные значения функции.

Пример. Найти экстремум функции $y = x^3 - 3x$

Решение. <u>1-й способ:</u>

1. Область определения функции: $(-\infty;+\infty)$;
2. $y' = 3x^2 - 3$;
3. $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – критические точки первого рода.
4.

	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	возрастает	$y_{max} = 2$	убывает	$y_{min} = -2$	возрастает

<u>2-й способ:</u>

1. $y' = 3x^2 - 3$;
2. $3x^2 - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ - критические точки первого рода;
3. $y'' = 6x$;
4. $y''(-1) = -6 < 0$, значит в точке $x = -1$ будет максимум $y_{max} = 2$;
5. $y''(1) = 6 > 0$, в точке $x = 1$ будет минимум $y_{min} = -2$.

2. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Определение. Наибольшим значением функции называется самое большее, а **наименьшим** значением - самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только одно наибольшее и только одно наименьшее значение.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда она может достигать наименьшее или наибольшее значение либо на концах $[a,b]$, либо в точках экстремума.

Для отыскания наибольшего или наименьшего значения на отрезке пользуются следующей схемой:

1. Находят первую производную $f'(x)$;

2. Находят критические точки функции, в которых $f'(x) = 0$ или не существует;

3. Находят значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах отрезка;

4. Сравнивая полученные значения, выбирают из них наибольшее и наименьшее значения функции.

Замечание. Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то наибольшее (наименьшее) значение совпадает с максимумом (минимумом) этой функции.

3. Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение. Если в некотором интервале любая касательная, проведенная к кривой в любой ее точке, лежит выше кривой, то кривая называется **выпуклой вверх (выпуклой)**, а если касательная лежит ниже кривой, то кривая называется **выпуклой вниз (вогнутой).**

Определение. Точка на кривой называется **точкой перегиба**, если при переходе через неё кривая меняет свою выпуклость на вогнутость или наоборот.

В точке перегиба касательная пересекает график.

Теорема. Если вторая производная $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a,b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале будет выпуклым (вогнутым).

Теорема *(необходимое условие точки перегиба).* Если x_0 – абсцисса точки перегиба, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Теорема *(достаточное условие точки перегиба).* Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка (x_0, y_0) есть точка перегиба графика функции.

Определение. Точка x_0, в которых $f''(x_0) = 0$ или не существует, называется **критической точкой второго рода.**

Пример. Найти точку перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 12x^2 + x - 1$

Решение.

1. Область определения функции: $(-\infty;+\infty)$;
2. $y' = 3x^2 - 24x + 3$; $y'' = 6x - 24$;
3. $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0$, откуда $x = 4$ – критическая точка второго рода.
4.

	$(-\infty;4)$	4	$(4;+\infty)$
y''	–	0	+
y	выпуклая	$y_{т.п.} = -125$	вогнутая

Ответ: Координаты точки перегиба (4;-125)

4. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении точки от начала координат.

Кривая может приближаться к своей асимптоте, оставаясь с одной стороны от асимптоты или пересекая её бесчисленное множество раз.

1. Вертикальная асимптота. Если при $x=a$ график функции имеет бесконечный разрыв, т.е. хотя бы один из пределов функции слева или справа от этой точки равен бесконечности, т.е. $\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

2. Наклонная асимптота. Наклонная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$, где параметры k и b определяются формулами: $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

Если $k = 0$, то из уравнения наклонной асимптоты получаем **горизонтальную асимптоту** $y = b$. То есть, если существует конечный предел $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, то прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота.

5. Общая схема исследования функции

Для полного исследования функции и построения её графика, можно к рассмотренным выше этапам добавить дополнительные элементы. Таким образом, предлагается следующий алгоритм действий:

1. Найти область определения функции;
2. Определить (если существуют) точки разрыва функции и её односторонние пределы в этих точках;
3. Исследовать функцию на четность;
4. Найти интервалы монотонности функции и экстремумы;
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба;
6. Найти асимптоты;
7. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и, если нужно, дополнительные точки для построения графика;
8. Построить график функции.

Контрольные вопросы:

1. Достаточные условия возрастания и убывания функций.
2. Какие точки кривой называются критическими точками первого рода?
3. Какая точка называется точкой минимума функции?
4. Какая точка называется точкой максимума?
5. Что называется экстремумом функции?
6. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке?
7. Какие точки кривой называются критическими точками второго рода?
8. Как найти точки перегиба графика функции?

9. Необходимое и достаточное условие перегиба.
10. Что называется асимптотой графика функции? Виды асимптот.
11. Общая схема исследования функции.

2. Интегральное исчисление функции одной переменной

2.1. Неопределенный интеграл

1. Неопределенный интеграл и его свойства

Операция интегрирования является обратной для операции дифференцирования. Основная задача дифференциального исчисления – нахождение производной данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу – находит функцию по её производной.

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x принадлежащих этому промежутку выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке имеет вид: $F(x) + C$, где C - постоянная.

Действительно, $(F(x) + C)' = f(x)$.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$\int f(x)dx$, то есть $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x– переменная интегрирования.

Определение. Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется **операцией интегрирования.**

Для проведения интегрирования надо знать основные свойства неопределенного интеграла и таблицу основных интегралов.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ и $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

2. $\int dF(x) = F(x) + C$;

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k – постоянная;

5. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(ax+b)+C$

2. *Таблица основных интегралов*

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad \alpha \neq -1;$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$;

3. $\int e^{x}dx = e^{x}+C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C = -\arccos\frac{x}{a}+C;$

10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C = -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a}+C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C;$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

13. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C, \quad 0<a\neq 1;$

Замечание: Интегрирование - очень сложная операция, но имеющая очень широкое применение. Поэтому имеются справочники, содержащие по несколько тысяч интегралов от часто встречающихся функций.

3. *Основные методы интегрирования*

Основными методами интегрирования являются непосредственное интегрирование, замена переменной и интегрирование по частям.

а) **Непосредственное интегрирование** - это вычисление интегралов, основанное на применении таблицы основных интегралов, основных свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подинтегральной функции.

Пример. Найти $\int\left(12x^2-5\sqrt{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx$

Решение:

$$\int\left(12x^2-5\sqrt{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx = \int\left(12x^2-5x^{\frac{1}{2}}+7x^{-2}\right)dx = 12\int x^2dx-5\int x^{\frac{1}{2}}dx+7\int x^{-2}dx =$$

$$= 12 \cdot \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 7\frac{x^{-1}}{-1} + C = 4x^3 - \frac{10}{3}x\sqrt{x} - \frac{7}{x} + C.$$

б) **Замена переменной интегрирования** (метод подстановки).

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X множество значений этой функции на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ , где } t = \varphi^{-1}(x). \qquad (1)$$

Формула (1) называется **формулой интегрирования заменой переменной.** На практике функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было неопределенный интеграл, стоящий справа, вычислить методом непосредственного интегрирования.

Общего правила выбора замены переменной для интегрирования любой функции не существует.

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом "подведения" под знак дифференциала. По определению дифференциала функции $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют "подведением" множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.

Пример. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln(x^2+1)+C$

в) Интегрирование по частям основано на следующей теореме.

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $v = v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке и на этом промежутке существует интеграл $\int v du$, то на нем существует интеграл $\int u dv$, причем

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (2)$$

Формула (2) называется **формулой интегрирования по частям**.

Замечание: Интеграл $\int v du$ должен быть либо табличным, либо более простым по сравнению с заданным интегралом $\int u dv$.

Типы интегралов, вычисляемые методом интегрирования по частям.

1. *Интегралы вида*: $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kx dx$, $\int P_n(x)\cos kx dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, k - некоторое число. Для нахождения этих интегралов полагают $u = P_n(x)$.

2. *Интегралы вида*: $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x) arctgx dx$, $\int P_n(x) arcctgx dx$. Через u обозначают функцию, являющуюся множителем при многочлене $P_n(x)$.

Пример: Найти интеграл $\int (2x+5)\ln x dx$

Решение: $\int(2x+5)\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, & du = 2dx \\ dv = 2x+5, & v = x^2+5x \end{vmatrix} \quad (x^2+5x)\ln x - \int(x^2+5x)dx =$

$= (x^2+5x)\ln x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

4.Интегрирование рациональных функций

Определение. Рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены.

Определение. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$ и **неправильной,** если степень числителя выше или равна степени знаменателя,.

Замечание: Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях.

Интеграл от дробной рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены , можно выразить через элементарные функции путем разложения на слагаемые.

Неправильную рациональную дробь можно делением числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Правильную рациональную дробь можно разложить на простейшие, всегда интегрируемые слагаемые дроби следующих двух видов:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где m и n-целые положительные числа, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

При интегрировании простейших дробей второго типа в знаменателе выделяют полный квадрат $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$, а затем используют подстановку $t = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx;$

Решение:

Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби методом неопределенных коэффициентов. Согласно указанного метода:

а) разложим знаменатель на простейшие действительные множители: $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2$;

б) напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби $\dfrac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$;

в) освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $x(x+2)^2$:

$$3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx = (A+B)x^2 + (4A + 2B + C)x + 4A;$$

г) составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства: $A+B=3$, $4A+2B+C=0$, $4A=8$;

д) решим эту систему: $A = 2$, $B = 1$, $C = -10$

е) подставим найденные значения постоянных A, B, C в схему разложения

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

ж) подставив под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и, проинтегрировав каждое слагаемое отдельно, найдем

$$\int\frac{(3x^2+8)dx}{x^3+4x^2+4x} = \int\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}\right]dx = 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x+2} - 10\int(x+2)^{-2}d(x+2) =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

5. Интегрирование тригонометрических функций

I. Интегралы типа $\int\sin^n xdx$, $\int\cos^n xdx$.

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) четные степени синуса или косинуса понижают вдвое по формулам:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ ;\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\ ;$$

2) если степени синуса или косинуса нечетные, то отделив от нее одну степень в качестве множителя, заменяют косинус или синус, соответственно, новой переменной.

Пример. Найти интеграл $\int\sin^2 3xdx$

Решение. Согласно приема 1 имеем

$$\int\sin^2 3xdx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos 6xdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

Пример. Найти интеграл: $\int\sin^5 xdx$

Решение. Согласно приема 2 отделяем от нечетной степени один множитель: $\sin^5 x = \sin^4 x\cdot\sin x$ и применяем метод замены переменной

$$\int\sin^5 xdx = \int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx = \left|\begin{array}{c}\cos x = z\\ -\sin xdx = dz\end{array}\right| = \int(1-z^2)^2dz = -\int(1-2z^2+z^4)\ dz =$$

$$= -z + \frac{2z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

II. Интегралы типа $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n- целые положительные числа. Для нахождения интегралов вида II применяют приемы 1 или 2 в зависимости от четности показателей степени.

Пример. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^5 x \sin x dx = \begin{vmatrix} \cos x = z \\ -\sin x dx = dz \end{vmatrix} =$

$$= \int (1-z^2) z^5 dz = -\int z^5 dz + \int z^7 dz = -\frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{8}z^8 + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + \frac{1}{8}\cos^8 x + C$$

III. Интегралы типа $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$.

Интегралы вида III можно найти путем замены tgx или, соответственно, $ctgx$ новой переменной.

Пример: Найти интеграл $\int tg^3 x dx$

Решение:

$$\int tg^3 x dx = \begin{vmatrix} tgx = z, \quad x = arctgz \\ dx = \dfrac{1}{1+z^2} dz \end{vmatrix} = -\int \frac{z^3}{1+z^2} dz = \int \left(z - \frac{z}{1+z^2} \right) dz = \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}tg^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+tg^2 x\right) + C = \frac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x + C.$$

IV. Интегралы типа $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$.

Интегралы типа IV можно найти путем разложения на слагаемые по формулам:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

Пример: Найти интеграл $\int \sin 3x \cos 5x dx$

Решение:

Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, пользуясь соответствующей формулой, затем интегрируем:

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 8x + \sin(-2x)] dx = \frac{1}{16}\int \sin 8x d(8x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$$

Контрольные вопросы:

1. Какая операция называется операцией интегрирования?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Запишите свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица основных интегралов.
5. Перечислите основные методы интегрирования.

6. Запишите формулу интегрирования по частям.
7. Запишите формулу интегрирования заменой переменной.
8. Как найти интегралы вида: $\int P_n(x)e^{kx}dx,\ \int P_n(x)\sin kxdx,\ \int P_n(x)\cos kxdx$?
9. Как найти интегралы вида: $\int e^{ax}\sin bxdx,\ \int e^{ax}\cos bxdx$?
10. Какая рациональная дробь называется правильной?
11. Какая рациональная дробь называется неправильной?
12. Приемы интегрирования рациональных функций.
13. Какие подстановки применяются при интегрировании тригонометрических выражений ?

2.2. Определенный интеграл

1.Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Выполним следующие действия:

1. разделим этот отрезок произвольно на n частичных отрезков длиною $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$;
2. выберем в каждом частичном отрезке по одной произвольной точке c_i;
3. вычислим значения функции $f(x)$ в выбранных точках и умножим значение $f(c_i)$ на длину частичного отрезка Δx_i;
4. составим сумму всех таких произведений:

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим предел интегральной суммы при неограниченном увеличении n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных отрезков. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то он называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение. Определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, где a и b – нижний и верхний пределы интегрирования.

Вычисляется определенный интеграл по **формуле Ньютона-Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

2. *Геометрический и физический смысл определенного интеграла*

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен **площади криволинейной трапеции**, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Оx и графиком функции $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ , где } \quad f(x) \geq 0$$

Физический смысл определенного интеграла: работа переменной силы, величина которой есть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $F=f(x)$, равна определенному интегралу от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

3. *Основные свойства определенного интеграла*

1. Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. При перестановке пределов изменяется знак интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5. Отрезок интегрирования можно разбивать на части

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. *Геометрические приложения определенного интеграла*

1. Вычисление площади

а) Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$S = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x) \geq 0$.

б) Площадь области, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, кривыми $y = f(x)$ – сверху и $y = g(x)$ – снизу, равна $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

в) Площадь области, ограниченной линией, заданной в полярных координатах

уравнением $r = r(\varphi)$, равна $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$, где φ-полярный угол, r - полярный радиус переменной точки линии.

г) Площадь области, ограниченной линией, заданной в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [\alpha; \beta]$, вычисляется по формуле $S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$,

д) Площадь поверхности, полученной от вращения вокруг оси Оx кривой $y = f(x) \geq 0$, заданной на $[a;b]$, вычисляется с помощью интеграла

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

2.Вычисление длины дуги

Определение. Под **длиной дуги** понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

а) Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ гладкая, т.е. производная $y' = f'(x)$ - непрерывная функция, то длина дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

б) Длина кривой, заданной в полярных координатах равна

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi; \qquad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

в) Длина кривой, заданной параметрически

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Пример. Вычислить длину циклоиды $x = a(t\text{-}\sin t)$, $y = a(1\text{-}\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Так как $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a\sin t$, то

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos t}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 2a(-2\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a$$

3. Вычисление объема

а) Объем тела, полученного от вращения вокруг оси Оx криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Оx и графиком функции $y = f(x)$, вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

в) Объем тела, полученного от вращения вокруг оси Оy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = c$, $y = d$, осью Оy и графиком функции $x = g(y)$ вычисляется по формуле $V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$.

4. Физические приложения определенного интеграла

1. Путь, пройденный телом

Пусть $v(t)$ – скорость движения материальной точки по некоторой прямой. Тогда путь s, пройденный этой точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$ определяется по формуле $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

2. Работа переменной силы

Работа, совершаемая переменной силой $F = f(x)$, направленной вдоль оси Оx, вычисляется по формуле $A = \int_a^b f(x)\ dx$.

3. Вычисление силы давления жидкости на пластинку.

Согласно закону Паскаля сила давления жидкости на элемент площади dS на глубине h равна $dF = \rho g h dS$, где ρ - плотность жидкости, $g = 9{,}81\ м/с^2$ - ускорение свободного падения. Тогда сила давления жидкости на пластину площадью S равна $F = \int_0^S \rho g h dS$.

4. Вычисление статических моментов

Определение. Статический момент системы материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относительно оси Оx (оси Оy) равен сумме произведений масс этих точек на их ординаты (абсциссы), т.е.

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i \quad \left(M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \right)$$

Если массы распределены непрерывны вдоль некоторой кривой. то операция суммирования переходит в операцию интегрирования.

а) **Статический момент кривой** равен:

$$M_x = \int_a^b \rho y dl = \int_a^b \rho y\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx \text{ относительно оси } Ox$$

$$M_y = \int_a^b \rho x dl = \int_a^b \rho x\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx \text{ относительно оси } Oy$$

Статические моменты кривой позволяют легко установить положение ее центра масс.

б) **Статические моменты плоской фигуры,** ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, кривыми $y = f(x)$ – сверху и $y = g(x)$ – снизу, равны:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,dx\ , \qquad M_y = \int_a^b \rho x\left[f(x) - g(x)\right]\,dx$$

5. Координаты центра тяжести

Координаты центра тяжести плоской линии, заданной уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$x_c = \frac{M_y}{\int_a^b \rho\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx}, \qquad y_c = \frac{M_x}{\int_a^b \rho\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx}$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_c = \frac{M_y}{\int_a^b \rho[f(x) - g(x)]dx}, \qquad y_c = \frac{M_x}{\rho S} = \frac{M_x}{\int_a^b [f(x) - gx]dx}.$$

6. Вычисление моментов инерции

Момент инерции плоской кривой:

$$I_x = \int_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad I_x = \int_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Момент инерции плоской фигуры:

$$\mathrm{I}_x = \frac{1}{4}\int_a^b \rho\cdot[f_2(x) + f_1(x)]^2\ [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

$$\mathrm{I}_y = \int_a^b \rho x^2[f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется определенным интегралом?
2. Записать формулу Ньютона- Лейбница.
3. Геометрический смысл определенного интеграла?

4. Механический смысл определенного интеграла?
5. Как вычисляется площадь фигуры?
6. Как найти работу переменной силы?
7. Записать формулу длины дуги.
8. Как определяется путь, пройденный телом?
9. Записать формулу обьема тела вращения вокруг оси Ox и оси Oy.
10. Записать формулу вычисления статических моментов.
11. Как вычисляются координаты центра тяжести?

3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

3.1. Функция нескольких переменных

1. Основные понятия

Определение. Функцией *n* переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется правило, по которому каждому набору значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ ставится в соответствие определенное значение переменной y.

В дальнейшем будем рассматривать в основном функцию двух переменных.

Определение. Функцией двух переменных $z = f(x,y)$ называется правило, по которому каждому набору значений переменных x и y ставится в соответствие определенное значение переменной z.

Определение. Графиком функции $z = f(x,y)$, определенной в области D, называется множество точек $M(x,y,z)$ трехмерного пространства таких, что $z = f(x,y)$ для всех $(x,y)\in D$. Графиком функции двух переменных является поверхность в трехмерном пространстве.

2. Частное и полное приращение функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$.

Если переменной x дадим приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной, то разность $f(x+\Delta x,y) - f(x,y)$ называется **частным приращением** функции z по переменной x и обозначается через $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x,y) - f(x,y)$$

Аналогично **частным приращением** функции z по переменной y называется величина

$$\Delta_y z = f(x,y+\Delta y) - f(x,y).$$

Если переменная x получает приращение Δx, а переменная y получает приращение Δy, то величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ называется **полным приращением** функции $z = f(x,y)$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $P_0(a,b)$, если она определена в этой точке и если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. Точки, в которых нарушены условия непрерывности функции, называются **точками разрыва**.

3. Частные производные

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемого аргумента при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Частная производная по x от функции $z = f(x,y)$ обозначается одним из символов: $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x,y)$.

Аналогично обозначается частная производная по y: $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $f'_y(x,y)$.

Пример. Найти частную производную функции $z = x^3 + 2x^2y - y^4$ по x.

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy$

Пример. Найти частную производную функции $z = \ln(x^2 - y)$ по аргументу x.

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y}$

Пример. Найти значения частных производных первого порядка функции $z = x^3 + 5y^2x + \cos x + 3$ в точке A (0; 1).

Решение: 1. $z'_x = 3x^2 + 5y^2 - \sin x$, $z'_y = 10yx$;

2. в точке А $z'_x(0;1) = 5$; $z'_y(0;1) = 0$

Так как частные производные в свою очередь могут быть функциями, то их можно повторно дифференцировать. При этом получаем частные производные более высоких порядков. В частности, производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x,\ z''_{xy} = (z'_x)'_y,\ z''_{yx} = (z'_y)'_x,\ z''_{yy} = (z'_y)'_y.$$

Производные z''_{xy}, z''_{yx} называются **смешанными.**

4. Полный дифференциал функции двух переменных

Определение. **Полным дифференциалом** функции $z = f(x,y)$ называется сумма произведений частных производных на соответствующие приращения переменных:

$$dz = z'_x\ \Delta x + z'_y\ \Delta y$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$. Поэтому формулу полного дифференциала можно записать в виде:

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy$$

Теорема (о достаточных условиях существования полного дифференциала). Если функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные, то она имеет в этой точке полный дифференциал.

Определение. Если функция $z = f(x,y)$ имеет полный дифференциал в точке $P_0(x_0, y_0)$, то она называется **дифференцируемой** в этой точке.

Аналогично определяется и вычисляется полный дифференциал функции любого числа переменных.

5. Дифференцирование сложной и неявной функции

Определение. Если $z = f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t, то есть $x = \varphi(t)$ и $y = g(t)$, тогда $z = f[\varphi(t), g(t)]$ - **сложная функция** от независимой переменной t.

Если функция $\varphi(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x, y), то сложная функция $z = f[\varphi(t), g(t)]$ также дифференцируема в точке t и ее производная находится по формуле

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t$$

Определение. Если для каждого значения x из некоторого промежутка существует одно определенное значение y, причем эти значения удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, то y называется **функцией** от x, **заданной в неявном виде** или **неявной функцией** от x.

Производная неявной функцией находится по формуле: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Что представляет собой график функцией двух переменных?
3. Что называется областью существования (определения) функции двух переменных?
4. Сформулируйте определение непрерывности функции двух переменных в точке и в области.
5. Что называется частным приращением функции двух переменных?
6. Что называется полным приращением функции двух переменных?
7. Дайте определение частной производной функции двух переменных.

8. Укажите геометрический смысл частных производных функции двух переменных.
9. Что называется частным дифференциалом функции двух переменных и каков геометрический смысл?
10. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?
11. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
12. Что называется полной производной и как она находится?
13. Сформулируйте правило дифференцирования неявной функции одной независимой переменной.
14. Как определяются частные производные второго порядка?

3.2. Применение функции многих переменных

1. *Необходимое и достаточное условия экстремума*

Определение. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется **точкой экстремума** (максимума или минимума) функции $z = f(x;y)$, если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ выполняется условие $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ или $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, соотвеоственно.

Теорема *(необходимое условие экстремума).* Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются **стационарными точками** функции $z = f(x,y)$.

Точками экстремума непрерывной функции двух переменных могут быть и точки, в которых функция не дифференцируема. Так, например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет, очевидно, в начале координат минимум, равный нулю, но в этой точке функция не дифференцируема; график этой функции есть круглый конус с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью Oz.

Определение. Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют называются **критическими точками** функции $z = f(x,y)$.

Таким образом, **экстремумы функции могут быть только в критических точках.**

Теорема *(достаточное условие экстремума).* Пусть в критической точке $M_0(x_0;y_0)$, и некоторой ее окрестности функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим

$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, где $A = f''_{xx}(x_0;y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0;y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0;y_0)$, x_0, y_0 - координаты критической точки. Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то в данной критической точке $M_0(x_0;y_0)$ функция имеет экстремум: при $A < 0$ (или $C < 0$) $M_0(x_0;y_0)$ – точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) – точка минимума;

б) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ нет экстремума;

в) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

2. Нахождение экстремума функции двух переменных

Исследование на экстремум функции двух переменных производится по следующей схеме:

1. Находят частные производные первого порядка $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$.
2. Находят критические точки, в которых производные равны нулю (решив систему уравнений $f'_x(x,y) = 0$, $f'_y(x,y) = 0$) или не существуют.
3. Находят частные производные второго порядка.
4. Вычисляют значения частных производных второго порядка в критических точках.
5. Находят значение определителя $\Delta = AC\text{-}B^2$.
6. Определяют знаки определителя Δ в критических точках, принимают решение о характере экстремумов (если они существуют) и находят их значения.

Пример. Найти экстремумы функции $z = 3x + 3y - x^2 - xy - y^2 - 6$.

Решение:

1. $z'_x = 3 - 2x - y, \qquad z'_y = 3 - x - 2y$.

2. $\begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 3 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1, \quad y = 1$

Получили одну стационарную точку (1;1).

3. $f''_{xx}(x,y) = -2, \qquad f''_{xy}(x,y) = -1; \qquad f''_{yy}(x,y) = -2$

4. $A = f''_{xx}(1;1) = -2; \quad B = f''_{xy}(1;1) = -1; \quad C = f''_{yy}(1;1) = -2$

5. $\Delta = A \cdot C - B^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$

6. Так как $\Delta = 3 > 0$ и $A = -2 < 0$, то в точке (1;1) функция принимает максимум: $z_{\max} = 3\cdot 1 + 3\cdot 1 - 1^2 - 1\cdot 1 - 1^2 + 6 = 3 + 3 - 1 - 1 - 1 + 6 = 9$.

Пример. При каких размерах открытая прямоугольная емкость объемом 4 кубических метров имеет наименьшую поверхность?

Решение: Обозначим размеры основания емкости через x и y, высоты через z. Тогда объем V = xyz, а площадь поверхности $S = xy + 2xz + 2yz$. Выразим из первого равенства $z=\frac{V}{xy}$ и подставим во второе. Получим, что $S=xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$ - функция двух переменных. Исследуем ее на экстремум и получим оптимальные размеры емкости: $x=y=\sqrt[3]{2V}=2$ м, $z=0{,}5\sqrt[3]{2V}=1$ м.

Контрольные вопросы:

1. Какие точки называются стационарными точками функции $z=f(x;y)$?
2. Какие точки называются критическими точками функции $z=f(x;y)$?
3. Сформулируйте необходимые условия существования экстремума функции двух переменных.
4. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции двух переменных.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

4.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Основные понятия.

Определение. Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, и в уравнения входят обязательно производные этих функций. Если неизвестной является функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если неизвестная - функция нескольких переменных, то уравнение называется **уравнением в частных производных**.

Мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Начнем с дифференциальных уравнений **первого порядка**. Это уравнения, в которые входит лишь первая производная неизвестной функции. Это уравнение может быть записано в виде

$$F(x,y,y')=0. \qquad (1)$$

Здесь x - независимая переменная, y - её неизвестная функция, $y'=\frac{dy}{dx}$ - производная функции y, F - заданная функция трех переменных x,y,y'.

Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

$y'-x^4=0;$ $\qquad x\sin y'-\ln y=0;$ $\qquad x\cos y+(y'-y^2)\sin x=0.$

В некоторых случаях уравнение (1) определяет переменную y' как функцию независимых переменных x и y:

$$y' = f(x,y). \qquad (2)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) равносильно дифференциальному уравнению (1) и называется **разрешенным относительно производной**.

Определение. Решением уравнения (1) называется любая функция $y=\varphi(x)$, определенная на некотором промежутке (x_1, x_2), что при подстановке её вместо y в уравнение (1) получается верное равенство на всем промежутке (x_1, x_2).

Решений дифференциального уравнения может быть бесчисленное множество.

Определение. Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется его **общим решением**. Оно включает произвольную постоянную и может быть записано в общем виде как $y = \varphi(x,C)$.

Придавая произвольной постоянной C определенные числовые значения, будем получать **частные решения**.

Задача по отысканию частного решения называется **задачей Коши**: найти такое решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет условию

$$y(x_0) = y_0. \qquad (3)$$

Условие (3) называется **начальным условием**.

2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Если в уравнении (2) $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, то такое уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**. Запишем его в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \qquad (4)$$

Предполагая, что $f_2(y) \neq 0$, преобразуем уравнение (3):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \qquad (5)$$

Уравнение (5) называют **уравнением с разделенными переменными**. В обеих частях полученного уравнения стоят дифференциалы некоторых функций аргумента x (так как y есть функция от x). Из равенства дифференциалов этих функций следует, что сами функции отличаются одна от другой на константу. Для нахождения общего решения дифференциального уравнения надо проинтегрировать обе части уравнения (5).

3. Линейные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется **линейным**, если оно содержит искомую функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит произведение yy'.

Общий вид такого уравнения:

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (6)$$

Если в (6) правая часть $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным **однородным,** в противном случае – **неоднородным.**

Для решения (6) заменим искомую функцию y произведением двух других функций, то есть введем подстановку

$$y = u(x)\cdot v(x) \tag{7}$$

Дифференцируя (7), получим:

$$y' = u'v + uv' \tag{8}$$

Подставив (7) и (8) в (6), получим:

$$u'v + uv' + P(x)\cdot u\cdot v = Q(x) \quad \text{или} \quad v\left[u' + P(x)\cdot u\right] + uv' = Q(x) \tag{9}$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию $u(x)$ так, чтоб выражение в квадратных скобках было равно нулю. Для этого надо найти хотя бы одно частное решение уравнения

$$\frac{du}{dx} + P(x)\cdot u = 0, \tag{10}$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные $\frac{du}{dx} = -P(x)\cdot u \;\Rightarrow\; \frac{du}{u} = -P(x)dx$ и проинтегрируем

$$\ln u = -\int P(x)dx, \text{ откуда получаем } \quad u = e^{-\int P(x)dx} \tag{11}$$

Подставив (11) в (9) с учетом (10), получим $e^{-\int P(x)dx}\cdot v' = Q(x)$, откуда

$$d\upsilon = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx; \quad \upsilon = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C. \tag{12}$$

Подставив (12) и (11) в (7), получим общее решение уравнения (6).

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right]. \tag{13}$$

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = y^2\ln x$

Решение. Положим $y = u\cdot\upsilon$, тогда $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$ и уравнение примет вид:

$$u'\upsilon + u\upsilon' + \frac{u\upsilon}{x} = \ln x \quad \text{или} \quad \upsilon(u' + \frac{u}{x}) + uv' = \ln x \tag{14}$$

Выберем функцию u так, чтобы выполнялось равенство

$$u' + \frac{u}{x} = 0 \tag{15}$$

Из уравнения (15) получаем частное решение $u = \frac{1}{x}$ и подставляем его в уравнение (14). Получим уравнение

$$\upsilon' = \frac{1}{x}\upsilon^2\ln x$$

с разделяющимися переменными. Находим его общее решение:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \ln x\frac{dx}{x}; \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \ln x\, d(\ln x)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$-\frac{1}{v}=\frac{(\ln x)^2}{2}+C, \text{ откуда}$$

$$v=-\frac{2}{(\ln x)^2+2C}.$$

Следовательно, $y=uv=-\frac{2}{x(\ln^2 x+2C)}$ - общее решение заданного уравнения.

Контрольные вопросы:

1. Какие уравнения называются дифференциальными ?
2. Что является решением дифференциального уравнения ?
3. Как решаются уравнения с разделенными переменными ?
4. Какая функция называется однородной ?
5. Какие уравнения называются однородными 1-го порядка ?
6. Какая замена переменных применяется при решении однородных уравнений?
7. Какие уравнения называются линейными ?
8. Какие уравнения называются линейными однородными?

4.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Основные понятия

Определение. Дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение, в которых наивысший порядок производных, входящих в уравнения, равен n. В общем случае оно имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$$

Определение. Уравнение вида

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right)$$

называется уравнением дифференциальным уравнением n –го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Общее решение уравнения n –го порядка зависит от n произвольных постоянных: $y=f\left(x, C_1, C_2,..., C_n\right)$. Для получения частного решения задают начальные условия: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$,…, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение. Уравнение вида

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \qquad (1)$$

где y – искомая функция, а $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции на некотором интервале (a,b), называется **линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка.**

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (1) называется **линейным однородным уравнением**, в противном случае – **неоднородным**.

Рассмотрим важный частный случай линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, а именно когда функция $p(x)$ и $q(x)$ являются постоянными величинами. Такие уравнения называются **линейными уравнениями с постоянными коэффициентами**.

3. Линейное однородное уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

Для нахождения общего решения уравнения (2) составляется уравнение

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (3)$$

которое называется **характеристическим**.

Характеристическое уравнение (3) является квадратным уравнением и, следовательно, имеет два корня k_1 и k_2. В зависимости от их значений получается три вида решений:

1) если корни характеристического уравнения вещественные и различные $(k_1 \neq k_2)$, то общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$$

2) если корни характеристического уравнения вещественные и равные $(k_1 = k_2 = k)$, то общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2x)e^{kx};$$

3) если корни характеристического уравнения комплексные $(k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i)$, то общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

Пример. Найти общее решение уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$; его корни $k_1 = 1, k_2 = -2$ вещественные и разные. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$; его корни $k_1 = k_2 = 1$ вещественные и равные. Общее решение уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2x)e^x$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + 13 = 0$; его корни $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i$ комплексные.

Общее решения уравнения имеет вид $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$

4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (4)$$

Общее решение такого уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$$y = Y + \tilde{y} \qquad (5)$$

Для нахождения частного решения можно применить метод вариации произвольных постоянных. Однако если в правой части уравнения (5) стоит многочлен, либо показательная функция, либо тригонометрическая функция *sinβx* или *cosβx*, либо линейная комбинация перечисленных функций, то частное решение может найдено методом неопределенных коэффициентов, не содержащий процесса интегрирования.

Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (5).

1) Правая часть имеет вид

$$f(x) = P_n(x)$$

где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ - многочлен степени $\boldsymbol{n}$.

Тогда частное решение $\tilde{y}$ можно искать в виде

$$\tilde{y} = R_n(x)x^r$$

где $R_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x + 1$

Решение: Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y = (C_1 + C_2x)e^x$ (см. выше). Так как правая часть уравнения –многочлен первой степени и ни один из корней характеристического уравнения $k^2 - 2k + 1 = 0$ не равен нулю ($k_1 = k_2 = 1$), то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = Ax + B$$

где A и B неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y} = Ax + B$ и подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, и $\tilde{y}''$ в данное уравнение, найдем

$$-2A + Ax + B = x + 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства: $A = 1,\ \ -2A + B = 1$ находим: $A = 1,\ \ B = 3$.

Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\tilde{y} = x + 3$, а его общее решение

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 3$$

2) Правая часть имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

Тогда частное решение $\tilde{y}$ следует искать в виде

$$\tilde{y} = R_n(x)x^re^{\alpha x},$$

где r– число корней характеристического уравнения, равных $\boldsymbol{\alpha}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 1,\ k_2 = 3$. Значит $Y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. В правой части этого уравнения – произведение многочлена первой степени на показательную функцию $e^{\alpha x}$ при α

$=1$. Так как среди корней характеристического уравнения имеется только один ко-корень $k_1=\alpha=1$, то $r=1$. В данном случае $P_n(x)=x-$многочлен первой степени. Поэтому частное решение данного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y}=(Ax+B)xe^x=(Ax^2+Bx)e^x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$-4Ax+2A-B=x$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства: $-4A=1$, $2A-2B=0$, находим : $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$. Подставляя найденные значения A и B в выражение для $\tilde{y}$, получаем частное решение данного уравнения $\tilde{y}=\frac{1}{4}(x^2+x)e^x$. Тогда общее решение имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}(x^2-x)e^x$$

3) Правая часть имеет вид $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$
где a,b и β – известные числа. Тогда частное решение $\tilde{y}$ надо искать в виде $\tilde{y}=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)x^r$, где A *и* B– неизвестные коэффициенты, а r - число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''+y=\sin x$

Решение: Характеристическая уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_1=i$, $k_2=-i$. Поэтому $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. В правой части равенства – тригонометрическая функция $\sin x$, т.е. $a=0$, $b=1$, $\beta=1$. Так как $i\beta=i$ – корень характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y}=(A\cos x+B\sin x)x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$2(-A\sin x+B\cos x)=\sin x,$$

откуда $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$. Таким образом, частное решение $\tilde{y}=-\frac{1}{2}x\cos x$. Общее решение уравнения

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Контрольные вопросы:

1. Какие уравнения называются линейными уравнениями 2-го порядка?
2. Какие уравнения называются линейными однородными уравнениями 2-го порядка?
3. Как составляется характеристическое уравнение ?
4. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами ?
5. Какие уравнения называются линейными неоднородными?
6. Какую структуру имеет общее решение линейного неоднородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

7. Как зависит частная составляющая общего решения от вида правой части неоднородного уравнения ?

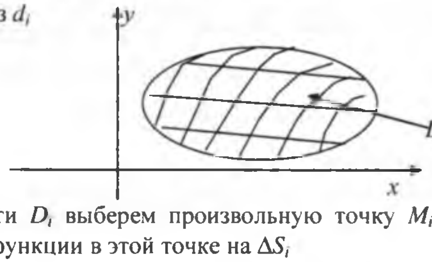
5. Кратные интегралы и их приложения

5.1. Кратные интегралы

1. Двойной интеграл

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x;y)$.

1. Разобьём область D на n «элементарных областей» D_i $(i = \overline{1,n})$, площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между двумя точками области) – через d_i



2. В каждой области D_i выберем произвольную точку M_i (x_i,y_i) и умножим значение $f(x_i,y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i
3. Составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1;y_1)\Delta S_1 + f(x_2;y_2)\Delta S_2 + ... + f(x_n;y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** функции $f(x, y)$ в области D.

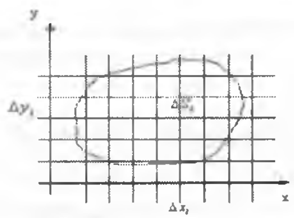
4. Рассмотрим предел интегральной суммы (1) при неограниченном увеличении числа малых площадок (когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \to 0$).

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется **двойным интегралом** от функции $z = f(x;y)$ по области D:

$$\iint_D f(x;y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (2)$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется **интегрируемой** в области D.

Так как предел интегральных сумм не зависит от способа разбиения области, то мы можем разбивать область D на площадки прямыми, параллельными координатным осям.



Тогда $\displaystyle\iint_D f(x;y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$,

где D – область интегрирования; x и y – переменные интегрирования; $dxdy$ - элемент площади в декартовых координатах, равный площади прямоугольника со сторонами dx и dy.

Теорема (*достаточное условие интегрируемости функции*). Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

2. Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint_D c\cdot f(x,y)dxdy = c\cdot\iint_D f(x,y)dxdy$, c – const.
2. $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x;y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y)dxdy$.
3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \mathrm{U} D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей, то
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$
4. Если в области D функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ удовлетворяют неравенству
$f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то и $\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D \varphi(x,y)dxdy$.
5. Если в области D имеет место неравенство $f(x,y) \geq 0$, то и $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

6. $\iint\limits_D dS = S$.

7. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой равна S, то $mS \le \iint\limits_D f(x;y)dxdy \le MS$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D.

8. **Теорема о среднем значении.** Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $P(x_0, y_0)$, что $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S$.

Величину $f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ называют средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

6. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Определение. Область D называется **правильной** в направлении оси Оx (Оy), если прямая, параллельная Оx (Оy) и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает ее границу только в двух точках.

Пусть правильная в направлении оси Оy область ограничена прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1 \le \varphi_2$ для всех $x \in [a;b]$. Тогда вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (3)$$

Формула (3) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в **декартовых координатах.**

Правую часть формулы (3) называют ***двукратным*** (или повторным) интегралом от функции $f(x,y)$ по области D.

При этом $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$ называют ***внутренним интегралом.***

Для вычисления двукратного интеграла сначала находят внутренний интеграл, считая x постоянным, затем внешний интеграл, т.е. результат первого интегрирования интегрируют по x в пределах от a до b.

Если правильная в направлении оси Оx область D ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$, причем $\varphi_1 \le \varphi_2$ для всех $y \in [c;d]$, то аналогично получим: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$.

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Замечание. Границы внешнего интеграла в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 2x$.

Решение.

1. Найдем границы интегрирования. Для этого:

а) найдем сначала точки пересечения кривых, ограничивающих область D:

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Таким образом, определили границы интегрирования по переменной x: $a = 0$, $b = 2$;

б) определим нижнюю и верхнюю границы по y, найдя ординаты точек кривых при любом значении $x \in (0;2)$. Очевидно, что $x^2 < 2x$, то есть $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = 2x$.

2. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} (2x+y)dy = \int\limits_0^2 dx \cdot \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^{2x} =$

$= \frac{7}{2}\int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{7}{6}x^3\Big|_0^2 = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

4. Приложения двойного интеграла

1. Геометрический смысл двойного интеграла: величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объёму цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, сверху- поверхностью $z = f(x,y)$, а с боков цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей является граница области D.

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

2. Физический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от функции $\rho(x,y)$ численно равен массе плоской пластинки, если подынтегральную функцию $\rho(x,y)$ считать плотностью этой пластинки в точке (x,y)

$$m = \iint\limits_D \rho(x;y)dxdy$$

3. Площадь плоской фигуры

Если положить в формуле объёма цилиндрического тела $f(x,y) = 1$, то тело «превратится» в прямой цилиндр с высотой $H = 1$.Объём такого цилиндра, как известно, численно равен площади S основания D:

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

4. Статические моменты фигуры D относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x;y)dxdy \quad \text{и} \quad M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x;y)dxdy$$

5. Координаты центра тяжести плоской фигуры по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{M_x}{m}$$

6. **Моменты инерции** плоской фигуры относительно осей Ox и Oy :

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \rho(x;y)dxdy \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \rho(x;y)dxdy$$

5. Тройной интеграл, его вычисление и приложения

Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x,y,z)$. Аналогично понятию двойного интеграла введем **тройной интеграл** от функции $u = f(x,y,z)$ по области V как предел интегральных сумм:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i \quad \text{или}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Вычисление тройного интеграла производится через трехкратный интеграл:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

где $x = a, x = b$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ – границы области D на плоскости Oxy, в которую проектируется область V; $z = \psi_1(x,y)$ и $z = \psi_2(x,y)$ - уравнения поверхностей, ограничивающих область V снизу и сверху, соответственно.

Тройные интегралы применяются для нахождения различных геометрических и физических величин аналогично двойному интегралу.

1. **Объем** тела $V = \iiint\limits_V dxdydz$

2. **Масса** тела $m = \iiint\limits_V \rho(x;y;z)dxdydz$

3. **Статические моменты** тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x;y;z)dxdydz, \quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x;y;z)dxdydz, \quad M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x;y;z)dxdydz$$

4. **Координаты центра тяжести**

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}$$

5. **Моменты инерции** относительно осей координат

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x;y;z)dxdydz, \qquad I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x;y;z)dxdydz$$

2. **Центробежные моменты инерции**

$$I_{xy} = \iiint\limits_V xy\rho(x;y;z)dxdydz, \quad I_{yz} = \iiint\limits_V yz\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V xz\rho(x;y;z)dxdydz$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется двойным интегралом ?
2. Каков геометрический смысл двойного интеграла ?
3. Каково достаточное условие интегрируемости функции ?
4. Перечислите свойства двойного интеграла.
5. Что называется двукратным интегралом ?
6. Как вычисляется двойной интеграл в декартовых координатах ?
7. Как вычисляется двойной интеграл в полярных координатах ?
8. Как вычисляется объем цилиндрического тела ?
9. Как вычисляется масса плоской пластины ?
10. Как вычисляются статистические моменты плоской фигуры ?
11. Как вычисляются моменты инерции ?
12. Как вычисляются координаты центра тяжести ?

5.2. Кратные интегралы в криволинейных координатах

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

В полярной системе координат положение точки P на плоскости определяется ее расстоянием r (длина радиуса-вектора точки) от начала координат (называемого полюсом) и углом φ между радиусом-вектором точки и полярной осью. Причем угол φ равен углу, на который надо повернуть полярную ось против часовой стрелки до совмещения с радиусом-вектором точки.

Если полюс поместить в начале декартовой системы координат, а полярную ось совместить с осью Ox, то переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $dxdy = rdrd\varphi$. Тогда получаем:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi},$$

где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовых координатах.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют то же правило сведения его к двукратному интегралу.

Замечание: переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$; область D есть круг, кольцо или часть таковых.

Пример. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$, где область D- круг $x^2+y^2 \le 9$

Решение:

Перейдём к полярным координатам:

$$\iint\limits_{D}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D^*}\sqrt{9-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\cdot rdrd\varphi=\iint\limits_{D^*}r\cdot\sqrt{9-r^2}\,drd\varphi.$$

Область D^* в полярной системе координат определяется неравенствами $0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le 3$. Тогда

$$\iint\limits_{D}r\cdot\sqrt{9-r^2}\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3(9-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot d(9-r^2)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{(9-r^2)\frac{3}{2}\cdot 2}{3}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$-\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}(0-27)d\varphi=9\varphi\Big|_0^{2\pi}=18\pi$$

2. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

В цилиндрической системе координат положение точки M в пространстве определяется полярными координатами (r,φ) ее проекции на плоскость Oxy и апликатой (z).

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки M осуществляется по формулам: $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ z=z.$ Элемент объема в цилиндрических координатах равен $dv=rdrd\varphi dz.$ Тогда тройной интеграл от функции $u=f(x,y,z)$ по области V будет иметь вид

$$\iiint\limits_{V^*}f\big(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z\big)rdrd\varphi dz,$$

где V^* - область в полярной системе координат, соответствующая области V в декартовых координатах.

3. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

В сферической системе координат положение точки M в пространстве определяется ее расстоянием r от начала координат (длина радиуса-вектора точки), углом θ между радиусом-вектором точки и осью Oz и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox.

Связь между декартовыми и сферическими координатами точки M осуществляется по формулам: $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=r\cos\theta.$ Элемент объема в сферических координатах равен $dv=r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta.$ Тогда тройной интеграл от функции $u=f(x,y,z)$ по области V будет иметь вид

$$\iiint\limits_{V^*}f\big(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta\big)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta$$

Замечание: переход к сферическим координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2+z^2)$; область V есть шар с центром в начале координат или шаровое кольцо.

Пример. Вычислить объем шара радиуса R.

Решение: $V=\iiint\limits_{V}dxdydz=\iiint\limits_{V^*}r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}r^2dr=$

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\pi}d\varphi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^R=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\cdot 2\pi=\frac{2\pi R^3}{3}(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Контрольные вопросы:

1. Какие координаты называются полярными ?
2. Как вычисляется двойной интеграл в полярных координатах ?
3. Какие координаты называются цилиндрическими ?
4. Как вычисляется тройной интеграл в цилиндрических координатах?
5. Какие координаты называются сферическими ?
6. Как вычисляется тройной интеграл в сферических координатах ?

6. Ряды и их применение

6.1. Числовые ряды

1. Основные понятия. Сходимость числового ряда

Определение. Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1,u_2,u_3,...,u_n...$, соединенных знаком сложения: $u_1+u_2+u_3+...u_n+u_{n+1}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

Числа $u_1,u_2,u_3,...,u_n...$ называется ***членами*** ряда, а u_n – ***общим членом*** ряда.

Общий член ряда u_n является функцией от n. Если известно аналитическое выражение этой функции, то, давая n последовательно значения 1,2,3…, можно найти сколько угодно членов ряда.

Ряд считается заданным. если известен его общий член

Определение. Сумма первых n членов ряда называется ***n-й частичной суммой*** ряда и обозначается S_n: $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_{n-1}+u_n$.

Определение. Если бесконечная последовательность частичных сумм ряда $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, S_{n+1}...$ - имеет конечный предел, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется **сходящимся**.

Число S называется **суммой** сходящегося ряда.

Определение. Если частичная сумма S_n не имеет конечного предела при $n \to \infty$, то ряд называется **расходящимся.** В этом случае не имеет смысла говорить о его сумме.

Определение. Если ряд сходится и его сумма равна S, то разность $S - S_n$ называется ***n-м* остатком** ряда и обозначается R_n.

Остаток $\mathrm{R}_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + ...$ - также является числовым рядом.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема *(необходимый признак сходимости).*

Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n + ...$ - сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.Если же $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... \frac{1}{n} + ...$

Решение:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Необходимое условие сходимости выполняется. Однако можно показать, что данный ряд, называемый **гармоническим,** расходится.

Ниже будут рассмотрены дополнительные (достаточные) условия сходимости рядов.

3. Основные свойства сходящихся рядов

Свойство 1. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + .. u_n + ...$ сходится и имеет сумму S, то его можно почленно умножить на одно и тоже число C $(C \neq 0)$. При этом полученный ряд $Cu_1 + Cu_2 + Cu_3 + ... + Cu_n + ...$ тоже сходится и имеет сумму CS.

Свойство 2. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + .. u_n + ...$сходится и имеет сумму *A*, а ряд $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$ сходится и имеет сумму *B*, то ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ...(u_n + v_n) + ...$ сходится и имеет сумму *A+B*, а ряд $(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + ... + (u_n - v_n) + ...$ сходится и имеет сумму *A-B*.

Свойство 3. Если ряд сходится, то сходится ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов.

4. Достаточные признаки сходимости

Признак сравнения 1.

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ..u_n + ..., \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ..., \quad (2)$$

причем каждый член первого ряда не превосходит соответствующего члена другого заведомо сходящегося ряда. Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Признак сравнения 2.

Если при $n \to \infty$ существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общих членов рядов (1) и (2), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то рассматриваемые ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Для сравнения используются ряды:

1) геометрический: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + ... + aq^{n-1} + ...\quad (a \neq 0)$, который при $|q| < 1$ ряд сходится, а при $|q| \geq 1$ расходится.

2) обобщенный гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + ... \frac{1}{n^\alpha} + ...$,

который сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Признак сходимости Даламбера.

Если в ряде с положительными членами $u_1 + u_2 + u_3 + \dots\ u_n + u_{n+1} + \dots.$ отношение (n+1)-го члена к n-му при $n \to \infty$ имеет конечный предел q, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то при:

а) $q < 1$ – ряд сходится;

б) $q > 1$ – расходится;

в) $q = 1$ – может сходиться, то есть надо применить другие признаки сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Решение:

$u_n = \frac{1}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Применяем признак Даламбера:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n\cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Так как $q < 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Радикальный признак сходимости Коши. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -ряд с положительными членами и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$. Тогда при:

а) $q<1$ – ряд сходится;

б) $q>1$ – расходится;

в) $q=1$ – может сходиться, то есть надо применить другие признаки сходимости.

Интегральный признак сходимости Коши. Если функция $f(x)$ на промежутке $[1,+\infty)$ является непрерывной, положительной и монотонно убывающей, то числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$, где $u_n=f(n)$, сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится если этот несобственный интеграл расходится.

Определение. Если среди членов данного ряда имеются как положительные, так и отрицательные, то такой ряд называется **знакопеременным.**

Определение. Знакопеременный ряд называется **знакочередующимся**, если любые два члена рядом стоящие имеют противоположные знаки. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,$$

Для знакочередующихся рядов справедлив признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и предел общего члена u_n равен нулю при $n\to\infty$, то ряд сходится и его сумма по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена.

Пример. Доказать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение:

Данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница: члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, так как $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, по признаку Лейбница, этот ряд сходится.

Следствие. Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Пусть дан ряд с членами произвольного знака.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n\ldots \tag{3}$$

Составим новый ряд из абсолютных величин членов ряда:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{4}$$

Определение. Ряд (3) называется **абсолютно сходящимся**. если сходится ряд (4).

Определение. Ряд (3) называется **условно сходящимся**, если он сходится, но ряд (4) расходится.

Контрольные вопросы:

1. Что называется числовым рядом, общим членом ряда?
2. Что называется n-й частичной суммой ряда, суммой ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся, расходящимся?
4. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
5. Сформулируйте достаточные признаки сходимости, основанные на сравнении рядов с положительными членами.
6. Сформулируйте признак Даламбера о сходимости ряда с положительными членами.
7. В чем состоит интегральный признак Коши о сходимости ряда с положительными членами?
8. Какой ряд называется знакочередующимся? Признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда.
9. Сформулируйте правило оценки остатка сходящегося знакочередующегося ряда.
10. Какой ряд называется условно сходящимся? Абсолютно сходящимся?

6.2. Функциональные ряды

1. Степенной ряд. Теорема Абеля.

Пусть дана последовательность функций, имеющих общую область определения.

Определение. Функциональным рядом называется ряд, членами которого являются функции:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1}$$

Функциональный ряд при одних значениях аргумента x может оказаться сходящимся числовым рядом, а при других значениях x- расходящимся. Если функциональный ряд сходится при $x = x_0$, то говорят, что ряд сходится в точке x_0.

Определение. Областью сходимости ряда (1) называется совокупность всех значений аргумента x, при которых этот ряд сходится.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд, члены которого являются степенными функциями аргумента x, т.е. ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{2}$$

где x_0 данное число, $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots -$ известные числовые коэффициенты. В частности, если $x_0 = 0$, то получаем степенной ряд:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

Очевидно, степенной ряд (3) всегда сходится при $x = 0$.

Определение области сходимости степенного ряда базируется на теореме Абеля.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, то он сходится абсолютно при любом значении x, удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится при любом значении x, удовлетворяющем неравенству $|x| > |x_0|$.

2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ состоит из точек сходимости данного ряда.

Таким образом, степенной ряд или может сходиться при любых значениях x, или существует точка x_0 $(|x_0| = R)$ такая, что в интервале $(-R, R)$ ряд сходится, а вне этого интервала - расходится. Тогда интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости** ряда.

Число R называют **радиусом сходимости** степенного ряда.

Чтобы найти область сходимости степенного ряда, надо сначала определить интервал сходимости $(-R, R)$ и затем выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т.е. при $x = -R$ и при $x = R$.

На практике радиус сходимости степенного ряда отыскивают с помощью признака Даламбера. Применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов степенного ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a^n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = q \cdot |x|, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q.$$

Ряд сходится абсолютно при всех тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству.

$$q \cdot |x| < 1, \text{ или } |x| < \frac{1}{q}, \text{или } -\frac{1}{q} < x < \frac{1}{q} \text{ или } -R < x < R,$$

где радиус сходимости $R = \dfrac{1}{q} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Пример. Найти радиус сходимости ряда $1 + \dfrac{x}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \dfrac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \cdots$

Решение:

$$R=\frac{1}{q}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)}{3^n\cdot n}=\lim_{n\to\infty}3\cdot(1+\frac{1}{n})=3$$

3. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем точку $x=a$, и в этом интервале имеет непрерывные производные от первого до n-го порядка включительно, то она может быть представлена в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена $R_n(x)$ по ***формуле Тейлора***:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где $$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

c – некоторое значение между a и x, то есть $x<c<a$ (или $a<c<x$).

Если функция $f(x)$ имеет в некотором интервале, содержащем точку $x=a$, производные любого порядка и если для некоторого значения x остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора стремится к нулю при $n\to\infty$, то получим ***ряд Тейлора***:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+...$$

В частном случае, при $a=0$ получаем ***ряд Маклорена***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

4. Разложение в степенной ряд функции e^x, cos x, sin x, ln(1+x), $(1+x)^m$

Пример. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=e^x$

Решение:

Последовательно дифференцируя функцию $f(x)$, будем иметь:

$$f'(x)=e^x;f''(x)=e^x;...f^{(n)}(x)=e^x...$$

Вычислим значения самой функции и ее производных при $x=0$:

$$f(0)=e^0=1;f'(0)=e^0=1;...;f^{(n)}(0)=e^0=1;...$$

Подставив найденные значения производных в правую часть ряда Маклорена, получим следующий ряд:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{n!}x^n+...$$

Аналогично получим разложения в ряд по степеням x некоторых функций:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+...$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...,\ \text{где } -1 < x < 1$$

Последний ряд называется ***биноминальным.*** Если m есть число целое и положительное, то правая часть обрывается на $(m+1)$-м члене, так как все последующие члены в этом случае равны нулю (получаем бином Ньютона).

Контрольные вопросы:

1. Какой ряд называется функциональным?
2. Что называется областью сходимости функционального ряда?
3. Какой ряд называется степенным?
4. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенного ряда.
5. Как найти интервал (область) сходимости степенного ряда?
6. Какой степенной ряд называется рядом Тейлора данной функции?
7. Как определяются коэффициенты ряда Тейлора?
8. Напишите формулу остаточного члена ряда Тейлора.
9. Приведите необходимый и достаточный признаки разложения функции в ряд Тейлора.
10. Какой степенной ряд называется рядом Маклорена ?
11. Как вычисляются коэффициенты ряда Маклорена данной функции?
12. Напишите разложения в степенной ряд функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $(1+x)^m$.

Материалы для самостоятельной работы

ИДЗ №1 Дифференциальное исчисление

Контрольные задания.

№1. Найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

1.1. а) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^2$, б) $y=\dfrac{4x+7tg x}{\sqrt{1+9x^2}}$,

в) $y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}$, г) $y=\ln arctg\, 2x$.

1.2. а) $y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$, б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$,

в) $y=2^{3x}\cdot tg\, 2x$, г) $y=\cos\ln 5x$.

1.3. а) $y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$, б) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$,

в) $y=e^{tg x}\cdot\ln 2x$, г) $y=\cos\sqrt{x^2+3}$.

1.4. а) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$, б) $y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}$,

в) $y=2^{8x}\cdot tg3x$, г) $y=\arcsin\ln 4x$.

1.5. а) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$, б) $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}$,

в) $y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$, г) $y=\sin\ln 5x$.

1.6. а) $y=(6x^2-\sqrt[3]{x}+5)^2$, б) $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$,

в) $y=3^{tgx}\cdot\arcsin(x^2)$, г) $y=\ln\sin 6x$.

1.7. а) $y=(x+\sqrt[3]{x}+7)^3$, б) $y=\frac{4x^2+7}{\sqrt{1+x}}$,

в) $y=\sin 3x\cdot e^{\cos x}$, г) $y=\ln arcctg3x$.

1.8. а) $y=(3x^4-2\sqrt[5]{x^2}-1)^4$, б) $y=\frac{3x}{1-x^2}$,

в) $y=5^{3x}\cdot tg7x$, г) $y=\cos\ln 15x$.

1.9. а) $y=(2x^2-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x})^{-4}$, б) $y=\frac{\arccos 4x}{x^4+2e^x}$,

в) $y=e^{tgx}\cdot\ln 5x$, г) $y=\cos\sqrt{x^3+3}$.

1.10. а) $y=(x^2+\frac{7}{\sqrt{x}}+24)^3$, б) $y=\frac{\sin 4x}{\cos 3x}$,

в) $y=7^{8x}\cdot tg5x$, г) $y=\arccos\ln 9x$.

1.11. а) $y=3(x^5-\sqrt[5]{x}+13)^5$, б) $y=\frac{\sqrt{1+4x^2}}{7^x+ctgx}$,

в) $y=6e^{ctgx}\cdot\sin 2x$, г) $y=\sin\ln\sqrt{5x}$.

1.12. а) $y=-2(x^2-\sqrt[3]{x}+5)^2$, б) $y=\frac{\sin 13x}{\sqrt{3x^2+14}}$,

в) $y=4^{tgx}\cdot\arccos(2x^3)$, г) $y=\ln\sqrt{\sin 6x}$.

1.13. а) $y=-7(5x-\sqrt[6]{x}+2)^3$, б) $y=\frac{4x+7ctgx}{\sqrt{1-x^2}}$,

в) $y=tg3x\cdot e^{ctgx}$, г) $y=\sqrt{\ln arctg5x}$.

1.14. а) $y=-23(x^3+\sqrt[3]{x^2}+1)^2$, б) $y=\frac{\arcsin 8x}{1-12x^2}$,

в) $y=2^{23x}\cdot ctg12x$, г) $y=\cos\sqrt{\ln 5x}$.

1.15. а) $y=3(x^2-\frac{1}{x^3}+\sqrt[5]{x})^2$, б) $y=\frac{\arcsin 7x}{x^4-e^{2x}}$,

в) $y=e^{ctg2x}\cdot\ln 12x$, г) $y=\cos\sqrt{x^3+13}$.

1.16. а) $y=5(x^2-\frac{5}{\sqrt{x}}+14)^5$, б) $y=\frac{\sin x}{\cos 5x}$,

в) $y=2^x\cdot tg4x$, г) $y=\arcsin\ln\sqrt{4x}$.

1.17. а) $y=(x-7\sqrt[3]{x}+1)^5$, б) $y=\frac{\sqrt{3+4x^2}}{5^x+tgx}$, в) $y = e^{ctg x} \cdot \sin 4x$, г) $y = \sin \ln 5x$.

1.18. а) $y = (16x^2 + \sqrt[3]{x} - 7)^2$, б) $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$,

в) $y = 7^{tgx} \cdot \arcsin(4x^2)$, г) $y = \ln \sin \sqrt{6x}$.

1.19. а) $y = 3(x^4 - 4\sqrt[3]{x} + 15)^5$, б) $y = \dfrac{4x + 7\cos 3x}{\sqrt{1 + x^2}}$,

в) $y = 4\cos 5x \cdot e^{\sin x}$, г) $y = \ln arctg 8x$.

1.20. а) $y = 5(x^3 - 8\sqrt[3]{x^2} - 9)^4$, б) $y = \dfrac{\arcsin 5x}{1 + x^2}$,

в) $y = 2^{3x} \cdot ctg 13x$, г) $y = \cos \sqrt{\ln 7x}$.

№ 2. Методами дифференциального исчисления найти:
1) экстремумы функции и интервалы монотонности;
2) наибольшее и наименьшее значения на отрезке [α; β].
3) точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости и вогнутости;

2.1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$, $\alpha = -1$; $\beta = 3$.

2.2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, $\alpha = 1$; $\beta = 3$.

2.3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $\alpha = -1$; $\beta = 2$.

2.4. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$, $\alpha = 2$; $\beta = 5$.

2.5. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 10$, $\alpha = 2$; $\beta = 4$.

2.6. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$, $\alpha = 2$; $\beta = 4$.

2.7. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$, $\alpha = -1$; $\beta = 2$.

2.8. $y = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$, $\alpha = 4$; $\beta = 8$.

2.9. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$, $\alpha = 0$; $\beta = 4$.

2.10. $y = \dfrac{x^2 + 9}{x + 4}$, $\alpha = 0$; $\beta = 4$.

2.11. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, $\alpha = -2$; $\beta = 3$.

2.12. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$, $\alpha = 2$; $\beta = 5$.

2.13. $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x$, $\alpha = -5$; $\beta = 0$.

2.14. $y = \dfrac{x}{6(x + 1)}$, $\alpha = 2$; $\beta = 3$.

2.15. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$, $\alpha = 0$; $\beta = 3$.

2.16. $y = -\dfrac{22}{x + 5}$, $\alpha = -2$; $\beta = 3$.

2.17. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $\alpha = -2$; $\beta = 0$.

2.18. $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$, $\alpha = -2$; $\beta = -1$.

2.19. $y=-2x^3+3x^2+12x-3.$ $\alpha=-5;\ \beta=0.$

2.20. $y=\dfrac{x^2-9}{x-7}.$ $\alpha=1;\ \beta=3.$

№3. В задачах 3.1-3.10 дана функция $z=f(x,y)$. Найти ее частные производные 2-ого порядка.

3.1. $z=\cos(xy+2y^3)$;

3.2. $z=\ln(x^2y+2y^2)$;

3.3. $z=arcctg\dfrac{y}{x}$;

3.4. $z=\sin(\sqrt{x}+x^2y)$;

3.5. $z=arcctg\,x/y$;

3.6. $z=x^y$;

3.7. $z=e^{2xy}$;

3.8. $z=arctg\dfrac{2xy^2+1}{y}$

3.9. $z=\sin^2(x^2y+\sqrt{y})$;

3.10. $z=\cos^2(x\sqrt{y}+x^3y)$;

В задачах 3.11-3.20 дана функция $z=f(x,y)$. Показать, что эта функция удовлетворяет указанному соотношению.

3.11. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-y^2/(4a^2x)}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

3.12. $z=\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}$ $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

3.13. $z=\ln(e^x+e^y)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z\partial^2 z}{\partial x^2\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$

3.14. $z=\dfrac{y}{y^2-a^2x^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

3.15. $z = xe^{\frac{y}{x}}$ $\qquad$ $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

3.16. $z = ye^x + xe^y$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$

3.17. $z = x^y$, $\qquad$ $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (l + \ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$

3.18. $z = \ln(x + e^{-y})$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z \partial^2 z}{\partial x \partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} * \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

3.19. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$ $\qquad$ $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$

3.20. $z = \ln(x^2 + y^2)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

№4. В задачах 4.1-4.10 найти производную функцию $u=f(x,y,z)$ в точке M по направлению к точке N.

4.1. $u = xy - \dfrac{x}{z}$, $\quad M(-4,3,-1)$, $\quad N(1,0,2)$

4.2. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, $\quad M(3,4,1)$, $\quad N(0,1,2)$

4.3. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$ $\quad M(1,0,-1)$, $\quad N(2,3,4)$

4.4. $u = x^3 + \sqrt[3]{y^2 + z^2}$, $\quad M(-1,1,2)$, $\quad N(1,2,1)$

4.5. $u = x^2 + \ln(2y + z)$, $\quad M(1,0,2)$, $\quad N(1,4,2)$

4.6. $u = 4xyz + 2\ln(x^2 - 5)$, $\quad M(3,0,1)$, $\quad N(2,2,4)$.

4.7. $u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy\sqrt{z}$, $\quad M(1,-1,4)$, $\quad N(3,0,4)$.

4.8. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - \ln(1 + x^2 + z^2)$, $\quad M(1,0,-1)$, $\quad N(1,1,-1)$.

4.9. $u = x\sqrt{y} + arctgxz$, $\quad M(1,4,3)$, $\quad N(1,1,1)$.

4.10. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $\quad M(1,5,-2)$ $\quad N(2,2,-1)$

В задачах 4.11-4.20 найти градиент функции $v = g(x,y,z)$ в точке N.

4.11. $v = \ln(1 + x^2 - y^2 + 2z)$, $\quad N(1,0,2)$

4.12. $v = arctg(x - 2y) + z^2$, $\quad N(0,1,2)$

4.13. $v = \ln(x^2 - 2y + z)$, $\quad N(2,3,4)$

4.14. $v = \ln x + yarctgz$, $\quad N(1,2,1)$

4.15. $v = x\sqrt{y} + ez^2$, $\quad N(1,4,2)$

4.16. $v = 4xyz + 2\ln(x^2 - 5),$ $N(2,2,4).$

4.17. $v = \ln(x^2 + y^2) - 2xy\sqrt{z},$ $N(3,0,4).$

4.18. $v = \sqrt{x^2 + y^2} - \ln(1 + x^2 + z^2),$ $N(1,1,-1).$

4.19. $v = x\sqrt{y} + arctg xz,$ $N(1,1,1).$

4.20. $v = x^2 y - \sqrt{xy + z^2},$ $N(2,2,-1)$

№5. В задачах 5.1-5.10 исследовать на экстремум функцию $z = f(x,y)$.

5.1. $z = x^3 y^2 (1 - x - y).$

5.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

5.3. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$

5.4. $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$

5.5. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$

5.6. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

5.7. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 1$

5.8. $z = 2 + 6x - x^2 - xy - y^2$

5.9. $z = x^2 + 4y^2 - 3xy - 4x + 6y + 2$

5.10 $z = xy - x^2 - y^2 - 9x + 6y + 5$

В задачах 5.11-5.20 найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = f(x,y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

5.11. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 1,$ $D: x = 3, y = 0. \quad x - y + 1 = 0$

5.12. $z = x^3 + y^3 - 3xy,$ $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

5.13 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 2,$ $D: x = 0, y = 0. \quad x + y = 3$

5.14. $z = x^2 + y^2 - xy + x + 5,$ $D: x = -3, x = 1, y = -2, y = 3$

5.15. $z = 6xy - x^2 - 3y^2 - 4x + 1,$ $D: x = 0, y = 0. \quad x + y = 4$

5.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,$ $D: x = 0, y = 0. \quad x + y = 1$

5.17. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2 - 1,$ $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$

5.18. $z = xy - y^2 + x + y,$ $D: x = 0, y = 0. \quad x + y + 6 = 0$

5.19. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 1,$ $D: x = 0, y = 4. \quad y = x^2 (x \geq 0)$

5.20. $z = x^2 - 2xy + y + 3,$ $D: y = 0, y = 1 - x^2$

ИДЗ №2 Интегральное исчисление

Контрольные задания

№1. Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1.1. а) $\int \frac{x + arctg\,3x}{1+9x^2}dx$; б) $\int (2x+1)e^{3x}dx$

в) $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}dx$

1.2. а) $\int \frac{1-\sin 3x}{3x+\cos 3x}dx$; б) $\int x^2\sin(2x+1)dx$

в) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+x+1)}dx$; г) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$

1.3. а) $\int \frac{x+\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; б) $\int (3x-1)\sin x dx$

в) $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

1.4. а) $\int \frac{1+\cos 2x}{2x+\sin 2x}dx$; б) $\int x\,arctg\,x dx$

в) $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$

1.5. а) $\int \frac{1+x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$; б) $\int x^2e^{-x}dx$

в) $\int \frac{2x^3+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$

1.6. а) $\int \frac{arctg^3 2x-3x}{1+4x^2}dx$; б) $\int (x^2+3x)\sin 2x dx$

в) $\int \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+x+6)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$

1.7. а) $\int \frac{\arccos^2 3x+4x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; б) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$

в) $\int \frac{x+11}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx$

1.8. а) $\int \frac{2-3\sin 3x}{(2x+\cos 3x)^2}dx$; б) $\int (4x+5)e^{2x}dx$

в) $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

1.9. а) $\int \frac{x-arctg^5 2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int (x^2-2x)\cos 5x dx$

в) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$; г) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

1.10. а) $\int \frac{2x+5\cos 5x}{(x^2+\sin 5x)^3}dx$; б) $\int arctg\sqrt{x}dx$

в) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$; г) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$

1.11. а) $\int \frac{\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$; б) $\int (4x-1)e^{2x}dx$

в) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

1.12. а) $\int \frac{x-\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int x\ln(x^2+4)dx$

в) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx$; г) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$

1.13. а) $\int \frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^3}dx$; б) $\int arccrc\sqrt{x}dx$

в) $\int \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$; г) $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx$

1.14. а) $\int \frac{1+x\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}dx$; б) $\int (2x+1)\sin^2 x dx$

в) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; г) $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$

1.15. а) $\int \frac{2\arccos^5 x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \sin x * e^{2x}dx$

в) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3-8}dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1.16. а) $\int \frac{2x-\sin x}{(x^2+\cos x)^2}dx$; б) $\int arctg\sqrt{3x+1}dx$

в) $\int \frac{2x^3-4x^2-16-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$; г) $\int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx$

1.17. а) $\int \frac{2+e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; б) $\int (2x-3)\cos^2 5x dx$

в) $\int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2-1)(x^2+4)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

1.18. а) $\int \frac{\cos(1+\ln x)}{3x}dx$; б) $\int (x-5)\sin(3x+1)dx$

в) $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

1.19. а) $\int \frac{2dx}{\sin^2 x(1-2ctgx)}$; б) $\int (3x-1)e^{1-2x}dx$

в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$

1.20. $a)\int \frac{2x+e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ $\qquad$ $б)\int (2x+1)\sin^2 dx$

$в)\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)}dx;$ $\qquad$ $г)\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

№2 Вычислить определенные интегралы.

2.1. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\sin x}dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 \ln(3x+1)dx$

2.2. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x^2)}dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

2.3. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx$

2.4. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^4 xdx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 (x+1)^2\ln(x+1)dx$

2.5. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 xdx$ $\qquad$ $б)\int_1^e \sqrt{x}\ln^2 xdx$

2.6. $a)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 xdx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 xarctgxdx$

2.7. $a)\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^4 xdx$ $\qquad$ $б)\int_0^{\pi} (4x+7)\cos^2 xdx$

2.8. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$ $\qquad$ $б)\int_1^2 (x-1)\ln xdx$

2.9. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+3\cos x}dx$ $\qquad$ $б)\int_{\frac{3}{2}}^{2} arctg(2x-3)dx$

2.10. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\sin x+\cos x)^2}dx$ $\qquad$ $б)\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$

2.11. $a)\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^2 xdx$ $\qquad$ $б)\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

2.12. $a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\sin 2xdx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$

2.13. $a)\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ $\qquad$ $б)\int_0^{\pi} xcco\frac{x}{2}dx$

2.14. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x-5\sin x+6}$ $\qquad$ $б)\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$

2.15 $a)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$

2.16. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\sin 2x dx$ $\qquad$ $б)\int_0^2(x-2)\sin 2x dx$

2.17. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3-2\sin x}dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^3}dx$

2.18. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x dx$ $\qquad$ $б)\int_1^3 x^2\ln x dx$

2.19. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^2 x dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1 arctg(3x-1)dx$

2.20. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\frac{x}{2}dx$ $\qquad$ $б)\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

№3. Вычислить двойной интеграл.

3.1. $\iint_D(12x^2y^2+16x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=x^2,\ \ y=-\sqrt{x}$

3.2. $\iint_D(9x^2y^2+48x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=-x^2$

3.3. $\iint_D(36x^2y^2-96x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=\sqrt[3]{x},\ \ y=-x^3$

3.4. $\iint_D(18x^2y^2+32x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=x^3,\ \ y=-\sqrt[3]{x}$

3.5. $\iint_D(27x^2y^2+48x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=x^2,\ \ y=-\sqrt[3]{x}$

3.6. $\iint_D(18x^2y^2+32x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=\sqrt[3]{x},\ \ y=-x^2;$

3.7. $\iint_D(18x^2y^2+32x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=x^3,\ \ y=-\sqrt{x}$

3.8. $\iint_D(27x^2y^2+48x^3y^3)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=-x^3$

3.9. $\iint_D(4xy+3x^2y^2)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=x^2,\ \ y=-\sqrt{x}$

3.10. $\iint_D(12xy+9x^2y^2)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=-x^2$

3.11. $\iint_D(8xy+9x^2y^2)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=\sqrt[3]{x},\ \ y=-x^3$

3.12. $\iint_D(24xy+18x^2y^2)dx\ \ dy;$

$D: x=1,\ \ y=x^3,\ \ y=-\sqrt[3]{x}$

3.13. $\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = x^2,\ \ y = -\sqrt[3]{x}$

3.14. $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = \sqrt[3]{x},\ \ y = -x^2$

3.15. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = x^3,\ \ y = -\sqrt{x}$

3.16. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = \sqrt{x},\ \ y = -x^3$

3.17. $\iint\limits_D (24xy - 48x^3y^3)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = x^2,\ \ y = -\sqrt{x}$

3.18. $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = \sqrt{x},\ \ y = -x^2$

3.19. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = \sqrt[3]{x},\ \ y = -x^3$

3.20. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dx\ dy;$

$D: x = 1,\ \ y = x^3,\ \ y = -\sqrt[3]{x}$

№4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка.

4.1. $xy' + y = x + 1$

4.2. $(x - xy^2)dx + (yx^2 + y)dy = 0$

4.3. $(1 + y^2)dx + (1 + 2x)ydy = 0$

4.4. $(x - y^2x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$

4.5. $y' + y = e^x$

4.6. $2xy' + 2y = 1 + y^2$

4.7. $xy(1 + y^2) - (1 + x^2)y' = 0$

4.8. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$

4.9. $\sqrt{1 + x^2}dy + 4(xy^2 + x)dx = 0$

4.10. $yy' - 1 + x = 0$

4.11. $(x + y)y' = x - y$

4.12. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$

4.13. $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$

4.14. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$

4.15. $(x^2 + xy)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

4.16. $y' + xy = -x^3$

4.17. $y' + e^x y = e^{2x}$

4.18. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4.19. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

4.20. $x^2y' = y(x + y)$

№5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее данным начальным условиям.

5.1. $y'' - 5y' = 10x + 3,$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 4$

5.2. $y'' - y' = -2x,$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 2$

5.3. $y'' - y = 8e^x,$ $y(0) = -1,$ $y'(0) = 2$

5.4. $y'' - 2y' = 4e^x,$ $y(0) = 1,$ $y'(1) = -1$

5.5. $y'' + 4y = 2x + 1,$ $y(0) = 1,$ $y'0 = 1$

5.6. $y'' + 5y' - 6y = \sin x,$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$

5.7. $y'' - 3y' + 2y = x - 1,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = -2$

5.8. $y'' - 5y' + 6y = e^{-2x},$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = -1$

5.9. $y'' - 5y' = x - 1,$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 1$

5.10. $y'' + 6y' + 9y = 2xe^x,$ $y(0) = -1,$ $y'(0) = 1$

5.11. $y'' - 2y' + y = 8e^x,$ $y(0) = 1,$ $y'(1) = 3$

5.12. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,$ $y(0) = 1,$ $y'0 = 3$

5.13. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x},$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2$

5.14. $y'' - 4y' = (3x - 1)e^{-x},$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 4$

5.15. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x},$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$

5.16. $y'' + 16y' = 7\cos x,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 4$

5.17. $y'' + 4y' = 6x^2 + 1,$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 3$

5.18. $y'' + 2y' + 5y = xe^{-x},$ $y(0) = 1,$ $y'(1) = 1$

5.19. $y'' + 4y' + 5y = 2x^2e^x,$ $y(0) = 0,$ $y'0 = 0$

5.20. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2$

Примеры решения индивидуальных домашних заданий

ИДЗ №1 Дифференциальное исчисление

№ 1. Найти производные:

а) $y = 3(x^3 + 8\sqrt[3]{x} - 9)^4$, б) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{1 - x^2}$,

в) $y = 2^{5x} \cdot tg 3x$, г) $y = \cos\sqrt{\ln 7x}$.

Решение:

а) $y' = \left[\ 3(x^3 + 8\sqrt[3]{x} - 9)^4\ \right]' = 12\left(x^3 + 8\sqrt[3]{x} - 9\right)^3\left(3x^2 + 8\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'\right) =$

$$= 12\left(x^3 + 8\sqrt[3]{x} - 9\right)^3\left(3x^2 + 8 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = 12\left(x^3 + 8\sqrt[3]{x} - 9\right)^3\left(3x^2 + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

б) $y' = \left(\dfrac{\arcsin 2x}{1 - x^2}\right)' = \dfrac{(\arcsin 2x)'\left(1 - x^2\right) - \arcsin 2x \cdot \left(1 - x^2\right)'}{\left(1 - x^2\right)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}}\left(1 - x^2\right) - \arcsin 2x \cdot (-2x)}{\left(1 - x^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 + 2x\sqrt{1 - 4x^2}\arcsin 2x}{\left(1 - x^2\right)\sqrt{1 - 4x^2}}$$

в) $y' = \left(2^{5x}\right)' \cdot tg 3x + 2^{5x}(tg 3x)' = 2^{5x}\ln 2 \cdot 5 \cdot tg 3x + 2^{5x}\dfrac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = 5 \cdot 2^{5x}\ln 2 \cdot tg 3x + \dfrac{3 \cdot 2^{5x}}{\cos^2 3x}$

г) $y' = \left(\sin\sqrt{\ln 3x}\right)' = \cos\sqrt{\ln 3x} \cdot \left(\sqrt{\ln 3x}\right)' = \cos\sqrt{\ln 3x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln 3x}} \cdot (\ln 3x)' =$

$$= \cos\sqrt{\ln 3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln 3x}} \cdot \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = \cos\sqrt{\ln 3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln 3x}} \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{\cos\sqrt{\ln 3x}}{2x\sqrt{\ln 3x}}$$

№ 2. Дана функция $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$. Методами дифференциального исчисления найти:

1) экстремумы функции и интервалы монотонности;

2) наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0;\ 1{,}5]$;

3) точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости и вогнутости.

Решение: 1. а) Найдем область X определения функции: $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$;

б) находим производную: $y' = \dfrac{2x(x-2) - \left(x^2 - 3\right)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$;

в) найдем критические точки: $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 1,\quad x_2 = 3 -$ критические точки;

г) разобиваем критическими точками область определения на интервалы, определяем знаки производной в этих интервалах и делаем выводы о характере монотонности функции и экстремумах:

X	$(-\infty;\ 1)$	1	$(1;\ 2)$	$(2;\ 3)$	3	$(3;\ +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+

y	возрастает	максимум	убывает	убывает	минимум	возрастает

$y_{max}(1)=2$, $y_{min}(3)=6$;

2. а) Найдем значение функции на концах отрезка [0; 1,5] :

$$y(0)=\frac{-0}{-2}=1{,}5, \quad y(1{,}5)=\frac{1{,}5^2-3}{1{,}5-2}=\frac{-0{,}75}{-05}=1{,}5;$$

б) сравниваем значения функции на концах отрезка и в критичческой точке $x_1=1$, находящейся внутри отрезка и делаем вывод: $y_{наиб}=2$, $y_{наим}=1{,}5$.

3. а) находим производную 2-го порядка:

$$y''=\left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{2}{(x-2)^3}.$$

Так как $y''\neq 0$, то критических точек 2-го рода нет;

б) найдем знаки y'' в области определения и сделаем выводы о характере выпуклости графика функции:

X	$(-\infty;\ 2)$	$(2;\ +\infty)$
y''	-	+
y	выпуклый	вогнутый

Точек перегиба нет.

№ 3. Дана функция $z=e^x\cos(x,y)$. Найти ее частные производные 2-го порядка.

Решение: а) Находим сначала производные первого порядка:

$$z'_x=(e^x\cos(x+y))'_x=(e^x)'_x*\cos(x+y)+e^x*(\cos(x+y))'_x=$$
$$=e^x*\cos(x+y)+e^x*(-\sin(x+y)*(x+y)'_x)=e^x\cos(x+y)-e^x*\sin(x+y)=$$
$$=e^x(\cos(x+y)-\sin(x+y)),$$
$$z'_y=(e^x*\cos(x+y))'_y=e^x*(-\sin(x+y))*(x+y)'_y=-e^x\sin(x+y).$$

б) Теперь находим производные второго порядка:

$$z''_{xx}(z'_x)'_x=e^x(\cos(x+y)-\sin(x+y))+e^x(-\sin(x+y)-\cos(x+y))=$$
$$=e^x(\cos(x+y)-\sin(x+y)-\sin(x+y)-\cos(x+y))=-2e^x\sin(x+y),$$
$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=e^x(-\sin(x+y)-\cos(x+y)),$$
$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=-e^x\sin(x+y)-e^x\cos(x+y)=-e^x(\sin(x+y)+\cos(x+y)),$$
$$z''_{yy}=(z'_y)_x=-e^x\cos(x+y)$$

№ 4. Дана функция $u=x^2-4y^2+2z^2-8$. Найти в точке М(2,1,2):

1) производную по направлению по направлению вектора $\bar{l}=2\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$;

2) $grad u$.

Решение: 1) Производная по направлению вычисляется по формуле

$$u'_l=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma$$

а) Найдем частные производные заданной функции:

$u'_x = (x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 8)'_x = 2x, \qquad u'_y = -8y, \;\; u'_z = 4y.$

В точке М имеем $u'_x = 4, \;\; u'_y = -8, \;\; u'_z = 8.$

б) Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{l} = l_x\bar{i} + l_y\bar{j} + l_z\bar{k}$ при $l_x = 2$, $l_y = 2$, $l_z = 3$:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + y_z^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}, \;\; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \;\; \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Тогда $u'_l = 4 * \frac{2}{\sqrt{17}} - 8 * \frac{2}{\sqrt{17}} + 8 * \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{16}{\sqrt{17}} = 3{,}88$;

2) Градиент функции вычисляется по формуле $gradu = u'_x\bar{i} + u'_y\bar{j} + u'_z\bar{k}$. Подставляя полученные значения частных производных, получаем

$$gradu = 4\bar{i} - 8\bar{j} + 8\bar{k}$$

№ 5.1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 6xy + y^3$.

Решение: 1. Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 3y^2$

2. Решаем систему уравнений $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$ *т.е.* $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \end{cases}$ и

получаем две критические точки M_1 (0,0) и M_2 (2,2).

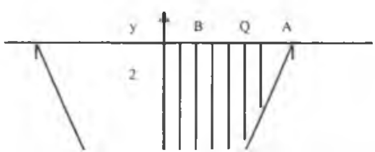
3. Проверим эти точки на выполнение достаточных условий существования экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка:
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$

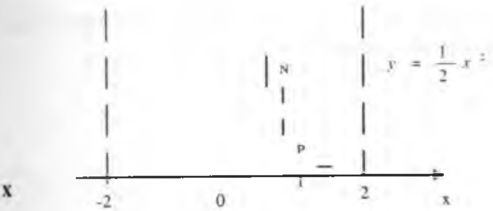
В точке M_1 имеем $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$, а значит экстремума в этой точке нет.

В точке M_2 $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ *и* $\frac{\partial^2 x}{dx^2} = 12 > 0$, следовательно, точка M_2 является точкой минимума и $z_{min} = 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 + 2^3 = -8$.

№ 5.2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в области *D*, заданной неравенствами $\frac{1}{2}x^2 \le y \le 2, \;\; x \ge 0$.

Решение: 1. Представим область определения функции. Указанная область D ограничена другой параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ и отрезками прямых $x = 0, y = 2$. Прямая $y = 2$ и парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ пересекаются при $x = -2$ и $x = 2$. Заданная область заштрихована на рисунке.





2. Найдем критические точки, лежащие внутри области D. Для этого найдем частные производные $z'_x = 6x^2 - 6y$, $z'_y = -6x + 6y$ и приравниваем их к нулю. Решив систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$, получим две критические точки M (0,0) и N(1,1). Точка M(0,0) принадлежит границе области D, а точка N (1,1) находится внутри области D. Определим $z(\text{N}) = z(1,1) = 2 - 6 + 3 = -1$.

3. Исследуем функцию на границе области.

На дуге ОА имеем $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 2$. Подставим в заданную функцию $y = \frac{1}{2}x^2$ и получим функцию одной переменной $z = 2x^3 - 6x \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3$. Найдем критические точки этой функции, лежащие внутри отрезка $[0,2]$ и вычислим значения функции в них и на концах отрезка. Производная $z'_x = 3x^3 - 3x^2$ равна нулю при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Внутри отрезка $[0,2]$ находится лишь одна критическая точка x=1. На дуге ОА ей соответствует точка $P(1, \frac{1}{2})$. Найдем

$$z(P) = z\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \qquad z(O) = z(0,0) = 0, \qquad z(A) = z(2,2) = 4.$$

На отрезке ОВ имеем $x = 0$, $0 \le y \le 2$, $z = 3y^2$. Производная $z'_y = 0$ при $y = 0$. Критических точек внутри отрезка $[0,2]$ нет. Значения функции на концах отрезка равны $z(O) = z(0,0) = 0$, $\quad z(B) = z(0,2) = 12$.

На отрезке АВ имеем $y = 2$, $z = 2x^3 - 12x + 12$, $0 \le x \le 2$. Ее производная $z' = 6x^2 - 12$ равна нулю при $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ лежит лишь критическая точка $x = \sqrt{2}$, на отрезке АВ ей соответствует точка Q($\sqrt{2}$;2). Найдем значение функции в этой точке: $z(Q) = z(\sqrt{2},2) = 12 - 8\sqrt{2}$.

4. Из полученных чисел: -1; 4; $-\frac{1}{4}$; 0; 12; $12 - 8\sqrt{2}$ наибольшим является число 12, а наименьшим – число (-1).

Следовательно, данная функция в области D принимает наибольшее значение z =12 в точке B(0,2), а наименьшее значение z = -1 в точке N (1,1).

ИДЗ №2 Интегральное исчисление

№ 1. Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результаты интегрирования проверить дифференцированием.

$$a)\int\frac{2x+e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx; \qquad б)\int(2x+1)\sin^2 dx$$

$$в)\int\frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)}dx; \qquad г)\int\frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$$

Решение:

а) $$\int\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}=\left|1-e^x=t,-e^x dx=dt\right|=-\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=-\int t^{-\frac{1}{3}}dt=-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(1-e^x\right)^2}+C$$

б) $$\int(5x-2)\ln x dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=(5x-2)dx, v=\dfrac{5x^2}{2}-2x\end{array}\right|=\left(\frac{5x^2}{2}-2x\right)\ln x-\int\left(\frac{5}{2}x-2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{5x^2}{2}-2x\right)\ln x-\frac{5x^2}{4}+2x+C$$

в) $$\int\frac{(19-4x)dx}{2x^2+x-3}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{19-4x}{2x^2+x-3}=\dfrac{19-4x}{(2x+3)(x-1)}=\dfrac{A}{2x+3}+\dfrac{B}{x-1}\Rightarrow 19-4x=A(x-1)+B(2x+3)\Rightarrow \\ x=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow A=-10.\, x=1\Rightarrow B=3\end{array}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{-10}{2x+3}+\frac{3}{x-1}\right)dx=-5\ln(2x+3)x+3\ln()x-1+C$$

г) $$\int\frac{dx}{4-5\sin x}=\left|tg\frac{x}{2}=u,\sin x=\frac{2u}{1+u^2},x=2arctgu,dx=\frac{2du}{1+u^2}\right|=\int\frac{2du}{(1+u^2)(4-\dfrac{10u}{1+u^2})}=$$

$$=\int\frac{du}{2u^2-5u+2)}=\int\frac{du}{(2u-1)(u-2)}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{(2u-1)(u-2)}=\dfrac{A}{2u-1}+\dfrac{B}{u-2}\Rightarrow 1=A(u-2)+B(2u-1)\Rightarrow \\ u=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=\dfrac{2}{3},u=2\Rightarrow B=\dfrac{1}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2u-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u-2}\right)du=\frac{1}{3}\ln|2u-1|+\frac{1}{3}\ln|u-2|+C=\frac{1}{3}\ln\left|2tg\frac{x}{2}-1\right|+\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}-2\right|+C$$

№ 2. Вычислить определенные интегралы.

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 xdx \qquad б)\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$$

Решение:

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 xdx=\left|\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right|=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)^2 dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{8}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{32}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\sin 0+\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{32}\sin\pi+\frac{1}{32}\sin 0=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}+\frac{\pi}{32}=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{8}$$

б) $$\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left|\frac{dx}{x+1}=d(\ln(x+1))\right|=\int_0^1\ln(x+1)d(\ln(x+1))=\frac{\ln^2(x+1)}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{1}{2}\ln^2 1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 2$$

№ 3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D(4xy+16x^3y^3)dxdy;\qquad D: x=1,\quad y=x^3,\quad y=-\sqrt[3]{x}$$

Решение:

1. Найдем границы интегрирования. Для нахождения границ по переменной x определим точки пересечения кривых, решив систему $\begin{cases} y=x^3 \\ y=-\sqrt[3]{x} \end{cases}\Rightarrow x_1=0.\ \ x_2=1.$

На отрезке $[0;1]$ $x^3\geq-\sqrt[3]{x}$, так что $y=x^3$ - верхняя граница интегрирования по y, а $y=-\sqrt[3]{x}$ - нижняя.

2. $$\iint_D(4xy+16x^3y^3)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3}(4xy+16x^3y^3)dy=\int_0^1(2xy^2+4x^3y^4)\Big|_{-\sqrt[3]{x}}^{x}dx==$$

$$\int_0^1\left[(2x^3+4x^7)-\left(2x^{\frac{5}{3}}+4x^{\frac{13}{3}}\right)\right]dx=\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{2}-\frac{2x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}-\frac{4x^{\frac{16}{3}}}{\frac{16}{3}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=-0{,}5.$$

№ 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка.

Решение:

а) $y'=(2x-1)ctgy$ - уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{ctgy}=(2x-1)dx\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{ctgy}=\int(2x-1)dx\quad\Rightarrow\quad\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=x^2-x+C\quad\Rightarrow$$

$$-\ln|\cos y|=x^2-x+C\quad\Rightarrow\quad\ln|\cos y|-x^2+x=C$$

Т.о. $\ln|\cos y|-x^2+x=C$ - общий интеграл заданного уравнения

б) $y'-2xy=xe^{-x^2}$ - линейное уравнение.

Решение будем искать в виде $y=uv$.

Подставим $y=uv$ и $y'=u'v+uv'$ в заданное уравнение:

$$u'v+uv'-2xuv=xe^{-x^2}\quad\Rightarrow\quad u'v+u[v'-2xv]=xe^{-x^2}$$

Подберем функцию v так, чтобы выполнялось равенство $v'-2xv=0$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v} = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = x^2 \quad \Rightarrow \quad v = e^{x^2}$$

Тогда имеем $\quad u'e^{x^2} = xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad u = \int xe^{-2x^2}dx = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C$

Т.о. $\quad y = Ce^{x^2} - \frac{1}{4}e^{-x^2}$ - общее решение данного уравнения.

№ 5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее данным начальным условиям

$y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

Общее решение будем искать в виде $\quad y = \bar{y} + y^*$, где

$\bar{y}$ - общее решение однородного уравнения $\quad y'' - 4y' + 4y = 0$,

а y^* - какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения.

1) Найдем $\bar{y}$. Для этого составим характеристическое уравнение

$\kappa^2 - 4\kappa + 4 = 0$ и найдем его корни.

D = 0, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$. Тогда

$$\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$$

2) Найдем y^*.

$y^* = Ax^2 + Bx + C$. Подставим y^* и производные

$y^{*\prime} = 2Ax + B,\qquad y^{*\prime\prime} = 2A$ в данное уравнение:

$$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = -x^2 + 3x$$

Приравняем коэффициенты при x в одинаковых степенях:

$$4A = -1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4},$$

$$-8A + 4B = 3 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{4},$$

$$2A - 4B + 4C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{8}$$

Т.о. $\quad y^* = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$.

Тогда $\qquad y = (C_1 + C_2x)e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ - общее решение данного уравнения.

Найдем C_1 и C_2. Для этого найдем

$y' = C_2e^{2x} + 2(C_1 + C_2x)e^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ и подставим начальные условия:

$1 = C_1 + \frac{3}{8} \Rightarrow C_1 = \frac{5}{8}$, $\quad 3 = C_2 + 2C_1 + \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$

Т.о. $\quad y = \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{2}x\right)e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ - частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Тестовые задания

1. Функцией $y = f(x)$ называется:

A) зависимость переменной y от переменной х, заданной формулой;

B) правило, по которому каждому знчению переменной х ставится в соответсвие определенное значения переменной y;

C) закон, по которому каждому знчению переменной y сопоставляет не менее одного значения переменной х ;

D) зависимость переменных х и y, при которой изменение одной переменной обязательно влечет за собой изменение другой переменной;

E) формулы связи переменных х и y.

2. Функцией $y=f(x)$ называется зависимость переменной у от переменной х:
   A) заданная формулой
   B) заданная одной или несколькими формулами
   C) заданная с помощью таблицы соответствия
   D) при которой значениям х сопоставляют значения у
   E) при котором каждому значению х сопоставляется определённое значение у.
3. Какой способ задания функций не существует:
   A) табличный B) словесный C) линейный
   D) графический E) аналитически
4. Аналитическим называется способ значения функций, при котором соответствие между значениями переменных х и у задаётся с помощью:
   A) формулы B) словесного описания C) графика
   D) таблицы E) одной или нескольких формул
5. Табличным называется способ значения функций, при котором соответствие между значениями переменных х и у задаётся с помощью:
   A) формулы B) словесного описания C) графика
   D) таблицы E) одной или нескольких формул
6. Графическим называется способ значения функций, при котором соответствие между значениями переменных х и у задаётся с помощью:
   A) формулы B) словесного описания C) графика
   D) таблицы E) одной или нескольких формул
7. Словесным называется способ значения функций, при котором соответствие между значениями переменных х и у задаётся с помощью:
   A) формулы B) словесного описания C) графика
   D) таблицы E) одной или нескольких формул
8. Графиком функции $y=f(x)$ называется:
   A) линия с координатами (х;у);
   B) множество точек на плоскости, у которых первая координата – абсцисса, а вторая координата – ордината;
   C) множество точек плоскости с координатами (х;у), где $y=f(x)$, а х пробегает область определения функции;
   D) линия. заданная уравнением $y=f(x)$;
   E) сплошная непрерывная кривая.
9. Если для $\forall x_1, x_2 \in X$ из условия $x_2>x_1$ следует, что $f(x_2)>f(x_1)$, то функция называется
   A) непрерывной B) ограниченной C) монотонной

D) убывающей E) возрастающей

10. Если для $\forall x_1, x_2 \in$ X из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$, то функция называется

A) непрерывной C) монотонной E) возрастающей
B) ограниченной D) убывающей

11. Функция называется убывающей, если
   A) большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента
   B) меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции
   C) большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции
   D) меньшему значению функций соответствует большее значение аргумента
   E) все значения функции отрицательны
12. Функция называется возрастающей, если
   A) большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента
   B) значения её аргумента растут
   C) большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции
   D) меньшему значению функции соответствует большее значение аргумента
   E) большему значению аргумента соответствует большее значение функции
13. Функция $f(x)$ называется убывающей в области X , если для всех $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ вытекает :

A) $f(x_1) < f(x_2)$ C) $f(x_1) \geq f(x_2)$ E) $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$
B) $f(x_1) \leq f(x_2)$ D) $f(x_1) > f(x_2)$

14. Функция $f(x)$ называется возрастающей в области X , если для всех $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ вытекает :

A) $f(x_1) < f(x_2)$ C) $f(x_1) \geq f(x_2)$ E) $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$
B) $f(x_1) \leq f(x_2)$ D) $f(x_1) > f(x_2)$

15. Функция $f(x)$ называется неубывающей в области X , если для всех $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ вытекает :

A) $f(x_1) < f(x_2)$ C) $f(x_1) \geq f(x_2)$ E) $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$
B) $f(x_1) \leq f(x_2)$ D) $f(x_1) > f(x_2)$

16. Функция $f(x)$ называется невозрастающей в области X , если для всех $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ вытекает :

A) $f(x_1) < f(x_2)$ C) $f(x_1) \geq f(x_2)$ E) $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$
B) $f(x_1) \leq f(x_2)$ D) $f(x_1) > f(x_2)$

17. Если функция $y = f(x)$ только возрастающая или только убывающая, то она называется

A) непрерывной C) монотонной E) возрастающей
B) ограниченной D) убываюшей

18. Если существует такое число M>0, что для всех $x \in$ X выполняется неравенство $|f(x)| \leq$ M, то функция называется

A) четной C) монотонной E) возрастающей
B) ограниченной D) нечетной

19. Если выполняется условие: $f(-x)=f(x)$, то функция называется

A) четной
B) ограниченной
C) монотонной
D) нечетной
E) ни четной и ни нечетной

20. Если выполняется условие: $f(-x)=-f(x)$, то функция называется

A) четной
B) ограниченной
C) монотонной
D) нечетной
E) ни четной и ни нечетной

21. Вычислить полный дифференциал функции $z=2x^2y^2$ в точке (1; 1).

A) $4\Delta x+4\Delta y$
B) $6\Delta x+4\Delta y$
C) $-4\Delta x+6\Delta y$
D) $6\Delta x-4\Delta y$.
E) $4\Delta x+12\Delta y$

22. Вычислить полный дифференциал функции $z=-4xy^2$ в точке (-1; 2).

A) $16\Delta x+16\Delta y$
B) $16\Delta x-8\Delta y$
C) $-16\Delta x+16\Delta y$
D) $8\Delta x+16\Delta y$.
E) $16\Delta x-16\Delta y$;

23. Пусть f(x)= 2x+3, φ(x)=3x+1. Найдите сложную функцию y=f(φ(x)):

A) 6x+5 B) 9x+3 C) 4x+9 D) 6x+3 E) 4x+3

24. Пусть f(x)= 2x+3, φ(x)=3x+1. Найдите сложную функцию φ(f(x)):

A) 6x+10 B) 9x+3 C) 4x+9 D) 6x+3 E) 4x+3

25. Пусть f(x)= 2x+3, φ(x)=3x+1. Найдите сложную функцию $f(\varphi^{-1}(x))$:

A) (3x-7)/3 B) (2x+7)/3 C) (2x+7)/2 D) (3x-7)/2 E) (6x-7)/3

26. Пусть f(x)= 2x+3, φ(x)=3x+1. Найдите сложную функцию $\varphi(f^{-1}(x))$:

A) (3x-7)/3 B) (2x+7)/3 C) (2x+7)/2 D) (3x-7)/2 E) (6x-7)/3

27. Для того чтобы к функции f(x) существовала обратная ей функция необходимо, чтобы f(x) была:

A) f(x) – четная или нечетная
B) f(x) – непрерывная
C) f(x) – выпуклая вверх или вниз
D) f(x) – периодическая
E) f(x) – возрастающая или убывающая

28. Для функции y=f(x) существует обратная функция, если функция f(x):

A) является аналитически заданая
B) выпуклая вверх или вниз
C) возрастающая или убывающая
D) не обращающаяся в нуль
E) знакопостаянная

29. Пусть функция y=f(x) задана аналитически и пусть существует обратная функция $y=f^{-1}(x)$. Для того чтобы найти обратнуя функцию $y=f^{-1}(x)$, достаточно:

A) из уравнения y=f(x) выразить x через y
B) в формуле y=f(x) пременные x и y поменять местами
C) из уравнения y=f(x) выразить x через y и поменять их местами
D) найти величину $\frac{1}{f(x)}$ и поменять x и y местами
E) найти величину, противоположную к f(x), т.е.- f(x)

30. Для функции $y=f(x)=\frac{1}{2}x+1$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$:

A) $\frac{1}{2}y+1$ B) 2y-2 C) $-\frac{1}{2}x-1$ D) $\frac{2}{x+2}$ E) 2(x-1)

31. Для функции $y=f(x)=x^3$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$:

A) y= $\frac{1}{x^3}$ B) x=$\frac{y}{3}$ C) y= - x^3 D) y=$\sqrt[3]{x}$ E) x=$\sqrt[3]{y}$

32. Каким из ниже перечисленных свойств не обладает показательная функция:
A) показательная функция является монотонной
B) a^0 =1
C) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
D) область определения функции – вся числовая прямая
E) область значений функции – вся числовая прямая

33. Каким из ниже перечисленных свойств не обладает логарифмическая функция:
A) логарифмическая функция является монотонной
B) область определения функции – множество положительных чисел
C) область значений функции – множество положительных чисел
D) $\log_a 1 = 0$
E) $\log_a a = 1$

34. Каким из ниже перечисленных свойств не обладает показательная функция с основанием, меньшим 1:
A) a^0 =1
B) область определения функции – вся числовая прямая;
C) область значений функции – множество положительных чисел;
D) функция является возрастающей;
E) показательная функция – непрерывна.

35. Каким из ниже перечисленных свойств не обладает логарифмическая функция с основанием, большим чем 1:
A) Область определения функции – множество положительных чисел;
B) Область значений функции – вся числовая прямая;
C) $\log_a 1 = 0$;
D) функция является непрерывной;
E) функция является убывающей.

36. Найдите область определения функции y= $\sqrt{x^2 - 1}$:
A) (-∞;-1] ∪ [1;+∞) B) [- $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$] C) [$\sqrt{2}$; + ∞) D) (- ∞; - $\sqrt{2}$] E) (- ∞; + ∞)

37. Найдите область определения функции y= lg(4- x^2):
A) [-2; 2] B) (- ∞;-2) ∪ (2;+ ∞) C) Ø D) (-2; 2) E) (- ∞; -2)

38. Найдите область определения функции y=$\frac{1}{4-x^2}$:
A) [-2; 2] B) (- ∞; -2) ∪ (2; + ∞) C) Ø D) (- ∞; -2) ∪ (-2; 2) ∪(2; + ∞) E) {-2; 2}

39. Найдите область определения функции y = $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$:
A) [0; +∞) B) {x; +∞ } C) (-2; +∞) D) (-∞;+∞) E) (-2; 2)

40. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = a$, если:

A) $f(a) = 0$ B) $|f(a)| < 1$ C) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ D) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ E) $\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| < 0{,}1$

41. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке a называется:
A) знакопостоянной;
B) непрерывной;
C) бесконечно малой;
D) ограниченной;
E)дифференцируемой

42. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то функция $f(x)$ в точке a называется
A) непрерывной B) ограниченной C) монотонной D) нечетной E) возрастающей

43. Пусть $f(x)$ определена в окрестности $x = a$. Тогда функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если:
A) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ B) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ C) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ D) $\lim\limits_{x\to a} f(a) = 0$ E) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует

44. Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то в точке x=a функция
A) возрастает
B) имеет разрыв первого рода
C) монотонна
D) непрерывна
E) имеет разрыв второго рода

45. Если односторонние пределы справа и слева существуют, но не равны между собой, то в точке x=a функция
A) имеет разрыв второго рода
B) непрерывна
C) монотонна
D) имеет разрыв первого рода
E) возрастает

46. Функция y=f(x) называется непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в интервале (a,b) и
A) в точке x = a непрерывна справа, а в точке x = b непрерывна слева
B) в точке x = a и в точке x = b непрерывна слева
C) в точке x = a и в точке x = b имеет разрыв
D) в точке x = a непрерывна слева, а в точке x = b непрерывна справа
E) в точке x = a и в точке x = b непрерывна справа

47. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{tg 3x}$;
A) -2 B) 3 C) $\frac{5}{3}$ D) 1 E) -1

48. Найдите предел $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^3+8}$
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{12}$ C) -3 D) -2 E) 1

49. Найдите предел $\lim\limits_{x\to -5}\frac{tg(x+5)}{x^2-25}$

A) 3 B) 2 C) 5 D) -5 E) $-\frac{1}{10}$

50. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

A) 8 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

51. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

A) $-\infty$ B) ∞ C) 3 D) 0 E) $+\infty$

52. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$:

A) ∞ B) 2/3 C) $-\infty$ D) 1 E) -1

53. Формула приращения функции $y=f(x)$ в точке x_0 имеет вид

A) $\Delta f(x_0)=f(x)+f(x_0)$
B) $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$
C) $\Delta f(x_0)=f(x_0)-f(x)$
D) $\Delta f(x_0)=f(x_0-x)-f(x_0)$
E) $\Delta f(x_0)=f(x_0+x)-f(x_0)$

54. Пусть Δx - приращение аргумента в точке x. Тогда приращение функции $y=f(x)$ в точке x задается формулой

A) $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$
B) $\Delta f(x)=f(x-\Delta x)+f(x)$
C) $\Delta f(x)=f(x-\Delta x)-f(x)$
D) $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)+f(x)$
E) $\Delta f(x)=f(x)-f(x-\Delta x)$

55. Найти приращение функции $y=x^2$ в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx.

A) $-2x\cdot\Delta x+\Delta x^2$
B) $2x\cdot\Delta x+\Delta x^2$
C) $2x^2+\Delta x^2$
D) $x^2+2x\cdot\Delta x$
E) $2x\cdot\Delta x$

56. Найти приращение функции $f(x)=x^2+5$ в точке $x=1$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=2$.

A) 0 B) 3 C) 8 D) 9 E) 12

57. Производная функции $y=f(x)$ определяется как предел:

A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$
B) $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$
D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y\Delta x}$
E) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

58. Производная функции $y=f(x)$ равна пределу отношения

A) приращения аргумента к приращению функции при условии, что последнее стремится к нулю
B) приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю

C) относительного приращения аргумента к относительному приращению функции при условии, что $\Delta x \to 0$
D) функции к ее аргументу при условии, что $\Delta x \to 0$
E) приращения функции к аргументу при условии, что $\Delta x \to 0$

59. Геометрический смысл производной функции состоит в том, что производная $f'(x_0)$ равна
A) приращению функции в точке x_0
B) угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке x_0
C) скорости изменения функции в точке x_0
D) приращению ординаты касательной к графику функции в точке x_0
E) углу наклона касательной к графику функции в точке x_0

60. Пусть α - угол наклона к оси OX касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Тогда производная $f'(x_0)$ равна
A) α B) $\cos\alpha$ C) $-ctg\alpha$ D) $tg\alpha$ E) $\frac{1}{tg\alpha}$

61. Пусть касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 параллельна оси OX. Тогда производная $f'(x_0)$ равна
A) -1 B) 0 C) 1 D) π E) ∞

62. Физический смысл производной функции $y = f(x)$ состоит в том, что производная $f'(x)$ равна
A) скорости движения материальной точки
B) приросту функции y при увеличении аргумента x
C) скорости изменения функции y относительно изменения аргумента x
D) относительному изменению функции
E) скорости изменения аргумента x относительно изменения переменной y

63. Пусть $S = S(t)$ - закон движения материальной точки. Тогда производная от пути по времени $S'(t)$ равна
A) пути, пройденному материальной точкой за время t
B) скорости движения в момент времени t
C) ускорению движения в момент времени t
D) средней скорости движения за время t
E) максимальной скорости движения за время t

64. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид
A) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
B) $y = f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$
C) $y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$
D) $y = f(x) + f'(x)(x - x_0)$
E) $y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

65. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$
A) $y = 2x - 1$
B) $y = x + 2$
C) $y = x$
D) $y = 3x - 2$
E) $y = 0$

66. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 1$
A) $y = x - 1$ B) $y = x + 1$ C) $y = -x - 1$

D) $y=-x-1$ E) $y=x$

67. Пусть $S(t)=3t^2-2t+5$ - закон движения материальной точки. Найти скорость движения v (3)

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

68. Пусть $S(t)=t^3-2t^2+3t$ - закон движения материальной точки. Найти скорость движения v (2)

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

69. Формула производной произведения функций имеет вид

A) $(uv)'=u'v+v'u$ C) $(uv)'=v'u-u'v$ E) $(uv)'=u'v'-uv$

B) $(uv)'=u'v-v'u$ D) $(uv)'=u'v'$

70. Формула производной частного функций имеет вид

A) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{v'u-u'v}{v^2}$ C) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ E) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+v'u}{v^2}$

B) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{v'u-u'v}{v}$ D) $\left(\frac{u}{v}\right)'=u'v+v'u$

71. Пусть $u=u(x)$ - дифференцируемая функция, $c-const$. Тогда $(c\cdot u)'=$

A) $c'\cdot u'$ B) $c'\cdot u$ C) $c'+u'$ D) $c\cdot u'$ E) $c\cdot u$

72. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда $(u+v)'=$

A) $u'\cdot v$ B) $v'\cdot u$ C) $u+v'$ D) $u'+v$ E) $u'+v'$

73. Указать производную функции $y=u-v$.

A) $u'v+v'u$ B) $cu'-c'u$ C) $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ D) $u'-v'$ E) $u'+v'-c'u$

74. Для сложной функции $y=f(\varphi(x))=F(x)$ формула производной имеет вид

A) $F'(x)=f'(x)\cdot\varphi'(x)$ D) $F'(x)=f'(x)$

B) $F'(x)=f'(\varphi(x))+\varphi'(x)$ E) $F'(x)=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

C) $F'(x)=f'(x)+\varphi'(x)$

75. Пусть $x=x(y)$ - функция, обратная к функции $y=y(x)$. Тогда производная $x'(y)$ вычисляется по формуле

A) $-y'(x)$ D) $\frac{y'(x)}{y(x)}$

B) $\frac{1}{y'(x)}$ E) $-\frac{y'(x)}{y(x)}$

C) $-\frac{1}{y'(x)}$

76. Пусть $u=u(x)$. Тогда производная от функции $\ln u$ равна

A) $\frac{u'}{u}$ B) $\frac{u'}{c}$ C) $\frac{u'}{u^2}$ D) $\frac{1}{u}$ E) $\frac{u}{u'}$

77. Пусть $u=u(x)$. Тогда производная от функции tgu равна

A) $-\frac{1}{\sin^2 u}$ B) $\frac{1}{\cos^2 u'}$ C) $\frac{u'}{\cos^2 u}$ D) $-\frac{u'}{\sin^2 u}$ E) $\frac{1}{\cos^2 u}$

78. Пусть $u=u(x)$. Тогда производная от функции $\cos u$ равна

A) $-\sin u$ B) $\sin u'$ C) $\cos u'$ D) $\cos u \cdot u'$ E) $-\sin u \cdot u'$

79. Пусть $u = u(x)$. Тогда производная от функции $1/u$ равна

A) $1/u^2$ B) $u'/\sqrt{u}$ C) $u'/(2\sqrt{u})$ D) $-u'/u^2$ E) $1/(2\sqrt{u})$

80. Среди формул таблицы производных указать неправильную

A) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

B) $(a^x)' = a^x \ln x$

C) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

D) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

E) $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$

81. Среди формул таблицы производных указать неправильную

A) $(\sin x)' = \cos x$

B) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

C) $(e^x)' = e^x$

D) $(\sqrt{x})' = -\frac{1}{x^2}$

E) $(\cos x)' = -\sin x$

82. Производная функции $y = \log_a x$ равна

A) a^x

B) $a^x \cdot \ln x$

C) $a^x \cdot \ln a$

D) $\frac{1}{x} \cdot \log_a e$

E) $\frac{1}{x} \cdot \ln a$

83. Производная функции $y = x^\alpha$ равна

A) $x^{\alpha-1}$ B) $x^{\alpha+1}$ C) αx^α D) $(\alpha-1)x^\alpha$ E) $\alpha x^{\alpha-1}$

84. Производная функции $y = a^x$ равна

A) a^x B) $a^x \cdot \ln x$ C) $a^x \cdot \ln a$ D) $\frac{1}{x} \cdot \log_a e$ E) $\frac{1}{x} \cdot \ln a$

85. Производная функции $y = ctgx$ равна

A) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ B) $\frac{1}{\cos^2 x}$ C) $-\frac{1}{\sin x}$ D) $\frac{1}{\cos x}$ E) $-tgx$

86. Найти производную функции $y = 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} + 2$

A) $3\sqrt[3]{x} + 2$ B) $4\sqrt[3]{x}$ C) $3x$ D) $x^{-\frac{2}{3}}$ E) $3x + 2$

87. Найти производную функции $y = \sin(3x+1)$

A) $\cos(3x+1)$ B) $-3\cos(3x+1)$ C) $3\cos x$ D) $-3\cos x$ E) $3\cos(3x+1)$

88. Найти производную функции $y = x \cdot \ln x$

A) $\frac{1}{x}$ B) $\ln x + 1$ C) $x + \frac{1}{x}$ D) $\ln x$ E) $1 - \frac{1}{x^2}$

89. Найти производную функции $y = \frac{2x+1}{x+1}$

A) $\frac{1}{(x+1)^2}$ B) $\frac{2x}{(x+1)^2}$ C) $-\frac{2}{(x+1)^2}$ D) $\frac{1}{x^2+1}$ E) 2

90. Найти производную функции $y = \ln(2x+1)$

A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{2x+1}$ C) $-\frac{1}{(2x+1)^2}$ D) $\frac{2}{2x+1}$ E) $2x+1$

91. Найти производную функции $y = \sqrt{4x-1}$

A) $\frac{1}{2\sqrt{4x-1}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{4x-1}}$ C) $\frac{4}{4x-1}$ D) $-\frac{1}{4x-1}$ E) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

92. Найти производную функции $y = e^{1-x}$

A) e^{x} B) $-e^{x}$ C) e^{1-x} D) $-e^{1-x}$ E) $(1-x)e^{-x}$

93. Найти производную функции $y = \cos(2x+3)$

A) $\frac{1}{2}\sin(2x+3)$ B) $2\sin(2x+3)$ C) $-2\sin(2x+3)$ D) $3\sin(2x+3)$ E) $-3\sin(2x+3)$

94. Найдите производную функции: $y = x^5 + \frac{1}{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 3$

A) $x^4 - 4x^3 - \sqrt{x}$

B) $5x^4 - 4x^{-5} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

C) $5x^4 - x^{-5} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

D) $5x^4 + 4x^{-5} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

E) $5x^4 + 4x^{-5} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}$

95. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 вычисляется по формуле

A) $dy = f(x_0)\cdot\Delta x$

B) $dy = f'(x_0)$

C) $dy = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$

D) $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$

E) $dy = f'(x_0)\cdot x$

96. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x вычисляется по формуле

A) $dy = \Delta f(x)$

B) $dy = f(x)\cdot\Delta x$

C) $dy = f'(x)\cdot\Delta x$

D) $dy = \Delta f(x)\cdot x$

E) $dy = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$

97. Формула применения дифференциала функции $y = f(x)$ в приближенных вычислениях имеет вид

$\Delta f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$

$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$

$f(x) \approx df(x_0)$

$f(x) \approx x_0 + df(x_0)$

$\Delta f(x_0) \approx df(x)$

98. Для нахождения приближенного значения функции $y = f(x)$ в точке x, близкой к точке x_0, используется формула

$f(x) \approx f(x_0) + df(x)$

$f(x) \approx df(x_0)$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)$

$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$

$f(x) \approx df(x_0)\cdot df(x - x_0)$

99. Производная y'_x функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, равна

A) $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

B) $y'_x = -\frac{y'_t}{x'_t}$

C) $y'_x = \frac{y'_t}{x}$

D) $y'_x = \frac{y}{x'_t}$

E) $y'_x = \frac{y'_t}{2x'_t}$

100. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 \end{cases}$

A) $y'_x = \frac{2}{3t}$. B) $y'_x = \frac{2}{t}$. C) $y'_x = \frac{1}{3t}$

D) $y_x' = \frac{2}{5t}$ E) $y_x' = \frac{2}{3t^3}$

101. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

A) $-\mathrm{ctg}t$ C) $\mathrm{ctg}t$ E) $\cos t$

B) $\mathrm{tg}t$ D) $-\mathrm{tg}t$

102. Точка x_0 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

A) $f(x_0)=f(x)$ C) $f(x_0)<f(x)$ E) $f(x_0)\le f(x)$

B) $f(x_0)>f(x)$ D) $f(x_0)\ge f(x)$

103. Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

A) $f(x_0)=f(x)$ C) $f(x_0)<f(x)$ E) $f(x_0)\le f(x)$

B) $f(x_0)>f(x)$ D) $f(x_0)\ge f(x)$

104. Точка x_0, в которой первая производная $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, называется

A) критической точкой первого рода

B) точкой максимума

C) точкой экстремума

D) критической точкой второго рода

E) точкой минимума

105. Точка кривой, в которых $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует, называется

A) критической точкой первого рода

B) точкой максимума

C) точкой экстремума

D) критической точкой второго рода

E) точкой минимума

106. Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 могла иметь экстремум, необходимо, чтобы

A) $f'(x_0)=0$ или не существовала D) $f'(x_0)<0$

B) $f'(x_0)>0$ E) $f(x_0)\le f(x)$

C) $f(x_0)<0$

107. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", то функция y= $f(x)$ в точке x_0 будет иметь

A) перегиб C) разрыв E) экстремума нет.

B) максимум D) минимум

108. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "-" на "+", то функция y= $f(x)$ в точке x_0 будет иметь

A) перегиб C) разрыв E) экстремума нет.

B) максимум D) минимум

109. Функция $y=f(x)$ в точке x_0 будет иметь максимум, если

A) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$. B) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$

C) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0.$

D) $f(x_0)>1$ и $f''(x_0)>0$

E) $f'(x_0)<0$ и $f''(x_0)<0$

110. Функция y= $f(x)$ в точке x_0 будет иметь минимум, если

A) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0.$

B) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$

C) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0.$

D) $f(x_0)>1$ и $f''(x_0)>0$

E) $f'(x_0)<0$ и $f''(x_0)<0$

111. Функция $y=f(x)$ будет выпуклой вверх на $(a;в)$, если для всех $x \in (a;в)$

A) $f''(x)>0$

B) $f''(x)<0$

C) $f''(x)=0$

D) $f''(x)<1$

E) $f''(x)>-1$

112.Функция $y=f(x)$ будет выпуклой вниз на $(a;в)$ если для всех $x \in (a;в)$

A) $f''(x)>0$

B) $f''(x)<0$

C) $f''(x)=0$

D) $f''(x)<1$

E) $f''(x)>-1$

113. Если вторая производная при переходе через критическую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть

A) максимум

B) минимум

C) выпуклость

D) точка перегиба графика функции

E) экстремум функции

114. Определите интервалы возрастания функции $y=(x-2)^2$

A) $(2;+\infty)$

B) $(0;1)\cup(1;+\infty)$

C) $(0;2)$

D) $(1;+\infty)$

E) $(-2;2)$

115. Определите интервалы возрастания функции $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$

A) $(-1;0)\cup(1;+\infty)$

B) $(0;1)\cup(1;+\infty)$

C) $(0;1)$

D) $(1;+\infty)$

E) $(-1;1)$

116. Исследуйте на экстремум функцию $y = x^3 - 3x$:

A) $y_{min} = y(1) = -1, \quad y_{max} = y(-1) = 2$

B) $y_{min} = y(1) = -2, \quad y_{max} = y(-1) = 2$

C) $y_{min} = y(7) = -1, \quad y_{max} = y(-1) = 2$

D) $y_{min} = y(4) = -1, \quad y_{max} = y(-2) = 2$

E) $y_{min} = y(1) = -5, \quad y_{max} = y(-1) = 6$

117. Исследуйте на экстремум функцию $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

A) $y_{min} = y(1) = -1, \quad y_{max} = y(-1) = 2$

B) нет экстремума

C) $y_{min} = y(7) = -1, \quad y_{max} = y(-1) = 2$

D) $y_{min} = y(4) = -1, \quad y_{max} = y(-2) = 2$

E) $y_{min} = y(1) = -5, \quad y_{max} = y(-1) = 6$

118. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x принадлежащих этому промежутку выполняется равенство

A) $f'(x)=F(x)$ C) $F'(x)=f(x)$ E) $f(x)=F(x)+C$

B) $df(x)=F(x)$ D) $dF(x)=f(x)$

119. Основное свойство первообразной гласит, что если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то

A) первообразная является единственной;

B) найдется некоторая постоянная C такая, что $F(x)+C$ также будет первообразной функции $f(x)$;

C) $F(x)+C$ является первообразной функции $f(x)$ при любом C;

D) $F(x)+C$ не для всех C является первообразной функции $f(x)$;

E) найдется некоторое значение постоянной C такое, что $F(x)+C$ будет первообразной функции $f(x)$.

120. Найти первообразную функции $f(x)=\cos 3x$.

A) $\sin 3x$; C) $3\sin 3x$; E) $-\sin 3x$.

B) $\frac{1}{3}\sin 3x$; D) $-\frac{1}{3}\sin 3x$;

121. Найти первообразную функции $f(x)=e^{5x}$.

A) $\frac{1}{5}e^{5x}$ B) e^{5x} C) $5e^{5x}$ D) e^{x} E) $5e^{x}$

122. Найти первообразную функции $f(x)=3x^2$.

A) $6x$ B) $3x^3$ C) $3x$ D) x^3 E) $\frac{x^3}{3}$

123. Найти первообразную функции $f(x)=\sin(5x+1)$.

A) $-\frac{1}{5}\cos(5x+1)$; C) $\frac{1}{5}\cos(5x+1)$; E) $5\cos(5x+1)$.

B) $-\cos(5x+1)$; D) $\cos(5x+1)$;

124. Найти первообразную функции $f(x)=\frac{1}{3x-2}$.

A) $3\ln|3x-2|$; C) $\frac{1}{3}\ln(3x-2)$; E) $\frac{1}{3}\ln|3x-2|$.

B) $\ln(3x-2)$; D) $\ln|3x-2|$;

125. Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется

A) множество ее производных; C) предел интегральной суммы;

B)множество ее первообразных; D) ее первообразная функция;

E) интеграл с бесконечным пределом интегрирования.

126. Какое из нижеперечисленных свойств неопределенного интеграла неверно.

A) $\int[f(x)+q(x)]dx=\int f(x)dx+\int q(x)dx$; B) $\int[f(x)-q(x)]dx=\int f(x)dx-\int q(x)dx$;

C) $\int f(x)\cdot q(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int q(x)dx$; E) $\int f'(x)dx = f(x)+C$.

D) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot \int f(x)dx$;

127. Какое из перечисленных свойств неопределенного интеграла неверно.

A) $\int [f(x)+q(x)]dx = \int f(x)dx + \int q(x)dx$

B) $\int [f(x)-q(x)]dx = \int f(x)dx - \int q(x)dx$

C) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot \int f(x)dx$

D) $\int \frac{f(x)}{q(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int q(x)dx}$;

E) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

128. Какое из перечисленных свойств неопределенного интеграла неверно.

A) $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

B) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

C) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

D) $\int df(x) = f(x)+C$;

E) $\left(\int f(x)dx\right)' = \int f'(x)dx$.

129. Укажите формулу интегрирования подстановкой в неопределенном интеграле.

A) $\int f(x)dx = |x=\varphi(t)| = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt,\ где\ \ t=\varphi^{-1}(x)$;

B) $\int udv = u\cdot v - \int vdu$;

C) $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f(u)du,\ \ где\ u=\varphi(x)$;

D) $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]\cdot d\varphi(x)$;

E) $\int [u(x)-v(x)]dx = \int u(x)dx - \int v(x)dx$.

130. Укажите формулу подведения под знак дифференциала в неопределенном интеграле.

A) $\int f(x)dx = |x=\varphi(t)| = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt,\ где\ \ t=\varphi^{-1}(x)$;

B) $\int udv = u\cdot v - \int vdu$;

C) $\int [u(x)-v(x)]dx = \int u(x)dx - \int v(x)dx$;

D) $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]\cdot d\varphi(x)$;

E) $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f(u)du,\ \ где\ u=\varphi(x)$.

131. Укажите формулу интегрирования по частям

A) $\int vdv = u\cdot v - \int udu$;

B) $\int u\cdot v\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot u\cdot du$;

C) $\int udv = u\cdot v - \int vdu$;

D) $\int udv = u\cdot v + \int vdu$;

E) $\int \frac{dv}{u} = \frac{v}{u} + \int \frac{du}{v}$.

132. Интегралы вида: $\int P_n(x)e^{kx}dx,\ \int P_n(x)\sin kxdx,\ \ \int P_n(x)\cos kxdx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, k - некоторое число, вычисляются методом

A) подстановки
B) замены переменной
C) подведения под знак дифференциала
D) непосредственного интегрирования
E) интегрирования по частям

133. Интегралы вида: $\int e^{ax}\sin bxdx,\ \int e^{ax}\cos bxdx$ вычисляются методом

A) подстановки
B) замены переменной
C) интегрирования по частям
D) подведения под знак дифференциала
E) непосредственного интегрирования

134. Интегралы вида: $\int P_n(x)\ln xdx,\ \int P_n(x)\arcsin xdx,\ \int P_n(x)\arccos xdx,$

$\int P_n(x)arctgxdx,\ \int P_n(x)arcctgxdx$ вычисляются методом

A) подстановки
B) замены переменной
C) подведения под знак дифференциала
D) интегрирования по частям
E) непосредственного интегрирования

135. Для вычисления интеграла $\int x^2\cdot\ln xdx$ интегрированием по частям необходимо обозначить:

A) u=lnx, dv=x^2dx B) u=x^2, dv=lnxdx C) u=x^2lnx, dv=dx
D) u=x, dv=xlnxdx E) u=xlnx, dv=xdx

136. Для вычисления интеграла $\int x\cdot\sin xdx$ интегрированием по частям необходимо обозначить:

A) u=xsinx, dv=dx B) u=sinx, dv=xdx C) u=x, dv=sinxdx
D) u=x, v=sinx E) u=sinx, v=x

137. Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то для функции $f(kx+b)$ первообразной будет

A) $F(kx+b)$ B) $\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)$ C) $\frac{1}{b}F(kx+b)$
D) $k\cdot F(kx+b)$ E) $bF(kx+b)$

138. Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то интеграл $\int f(kx+b)dx$ равен

A) $F(kx+b)+C$; B) $bF(kx+b)+C$; C) $k\cdot F(kx+b)+C$.
D) $\frac{1}{b}F(kx+b)+C$; E) $\frac{1}{k}F(kx+b)+C$;

139. Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то для функции $f(kx+b)$ первообразной будет

A) $F(kx)+b$;
B) $\frac{1}{k}F(x)+b$;
C) $\frac{F(x)}{kx+b}$;
D) $\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)$;
E) $kF(kx+b)$.

140. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(x+1)^6}$

A) $\frac{1}{7(x+1)^7}+C$;
B) $\frac{(x+1)^7}{7}$;
C) $-\frac{5}{(x+1)^5}+C$;
D) $\frac{1}{(x+1)^5}+C$;
E) $-\frac{1}{5(x+1)^5}+C$.

141. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{3x+1}$

A) $\ln|3x+1|+C$;
B) $\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$;
C) $3\ln|3x+1|+C$;
D) $-\frac{3}{(3x+1)^2}+C$;
E) $\sqrt{3x+1}+C$.

142. Вычислить неопределенный интеграл $\int 4e^{4x+1}dx$

A) $e^{4x+1}+C$;
B) $4e^{4x+1}+C$;
C) $\frac{1}{4}e^{4x+1}+C$;
D) $4e^{x}+C$;
E) $e^{4x}+C$.

143. Интегральная сумма функции $f(x)$ на $[a;b]$ имеет вид:

A) $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$;
B) $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot\Delta x_i$;
C) $\sum_{i=0}^{n-1}[f(c_i)+\Delta x_i]$;
D) $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\cdot\Delta x_i$;
E) $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i-x_i)\cdot\Delta x_i$.

144. Определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется

A) $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\cdot(b-a)$;
B) $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x_i$;
C) $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot\Delta x_i$;
D) $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\cdot\Delta x_i$;
E) $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} c_i\cdot f(\Delta x_i)$.

145. $\int_a^в f(x)dx=F(x)\Big|_a^в=F(в)-F(a)$ - это формула:

A) Лагранжа
B) Даламбера
C) Коши
D) Ньютона-Лейбница
E) Ньютона

146. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

A) $\int_a^в u\cdot dv=u\cdot v-\int_a^в v\cdot du$;
B) $\int_a^в u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^в-\int_a^в v\cdot du$;
C) $\int_a^в u\cdot v\,dv=u\cdot v\Big|_a^в-\int_a^в v\cdot u\,dx$;
D) $\int_a^в u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^в+\int_a^в v\cdot du$;

E) $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v + \int_a^b v \cdot du$

147. Какое из перечисленных свойств определенного интеграла неверно?

A) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

B) $\int_a^a f(x)dx = 0$

C) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

D) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

E) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

148. Какое из перечисленных свойств определенного интеграла неверно?

A) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

B) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

C) $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$

D) $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$

E) $\int_a^a f(x)dx = 0$

149. Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) ln2 D) 2ln2 E) $\sqrt{2}-1$

150. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 e^x dx$

A) e^{-1}; B) -1; C) 1-e; D) e; E) e-1.

151. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}dx$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 1

152. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

A) $-\frac{1}{2}$; B) 0; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{3}{2}$; E) $\frac{5}{2}$.

153. Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$

A) 1 B) 2 C) $\ln 2$ D) $\frac{1}{3}\ln 2$ E) $\frac{2}{3}$

154. Криволинейной трапецией называется область, ограниченная

A) сверху кривой $y=f(x)$ и снизу осью OX;

B) сверху осью OX и снизу кривой $y=f(x)$;
C) сверху и снизу кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$;
D) сверху кривой $y=f(x)$, снизу осью OX и с боков прямыми $x=a$ и $x=b$;
E) сверху и снизу кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и с боков прямыми $x=a$ и $x=b$.

155. Геометрический смысл определенного интеграла от неотрицательной функции $y=f(x)$ по $[a; b]$ состоит в том, что он равен
A) длине дуги кривой $y=f(x)$, $a \le x \le b$;
B) объему тела вращения;
C) площади поверхности вращения кривой $y=f(x)$, $a \le x \le b$, вокруг оси OX;
D) площади криволинейной трапеции;
E) периметру криволинейной трапеции.

156. Площадь области, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ ($a<b$) и кривыми $y=f(x)$ - сверху и $y=g(x)$ – снизу равна:
A) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ B) $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$
C) $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ D) $-\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$
E) $\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

157. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 1 - x^2$ и осью OX
A) 1/3 B) 2/3 C) 1 D) 4/3 E) 2

158. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 3$ и параболой $y = x^2$
A) $\frac{32}{3}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{17}{3}$ D) $\frac{17}{5}$ E) $\frac{16}{3}$

159. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$
A) $20\frac{5}{6}$ B) $25\frac{5}{6}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $20\frac{1}{6}$ E) $\frac{34}{3}$

160. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - x$
A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

161. Функцией $z = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется
A) зависимость между переменными z и $x_1,x_2,\ldots,x_n$, заданная формулой;
B) правило, по которому каждому набору значений переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ставится в соответствие не менее одного значения переменной z;
C) правило, по которому каждому набору значений переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ставится в соответствие единственное значение переменной z;

D) соответствие между переменными z и $x_1,x_2,...,x_n$, при котором каждому значению z сопоставляется определенный набор значений переменных x_1, $x_2,..., x_n$;
E) зависимость z от переменных $x_1,x_2,...,x_n$, при которой изменение переменных x_1, $x_2,..., x_n$ влечет изменение переменной z.

162. Пусть каждому набору значений переменных x и y ставится в соответствие определенное значение переменной z. Тогда это соответствие называется
A) функцией двух переменных;
B) функцией трех переменных;
C) поверхностью уровня функции;
D) линией уровня функции;
E) графиком функции.

163. Графиком функции $z=f(x;y)$, определенной в области D, называется
A) множество точек $(x;y)$ из области D, для которых $f(x;y)=z$;
B) множество точек $(x;y;z)$ трехмерного пространства таких, что $z=f(x;y)$ для всех $(x;y)\in D$;
C) множество точек $(x;y;z)$ трехмерного пространства таких, что $f(x;y)=0$, а z принимает любое значение;
D) кривая, принадлежащая области D, с уравнением $f(x;y)=z$, где z принимает заданное значение;
E) поверхность в трехмерном пространстве с уравнением $f(x+y)=z$.

164. Пусть функция $z=f(x;y)$ задана на множестве D. Тогда множество точек $(x;y;z)$ таких, что $z=f(x;y)$ для всех $(x;y)\in D$, называется
A) областью определения функции;
B) областью значений функции;
C) поверхностью уровня функции;
D) линией уровня функции;
E) графиком функции.

165. Найти область определения функции $z=(\sqrt{x}+1)y+\sin xy$
A) правая полуплоскость относительно оси $OУ$
B) верхняя полуплоскость относительно оси OX
C) I и III координатные углы
D) I координатный угол
E) плоскость $XOУ$

166. Найти область определения функции $z=\dfrac{x+2xy+y}{y-x}$
A) полуплоскость, лежащая выше прямой $y = x$
B) плоскость XOY, за исключением биссектрисы I и III координатных углов
C) плоскость $XOУ$
D) прямая $y = x$
E) полуплоскость, лежащая правее прямой $y = - x$

167. Найти область определения функции $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$

A) плоскость *XOУ*
B) первая четверть $x > 0$, $y > 0$
C) плоскость *XOУ*, за исключением точки O(0;0)
D) плоскость *XOУ*, за исключением осей *OX* и *OУ*
E) $\varnothing$ - пустое множество

168. Найти область определения функции $z = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

A) плоскость *XOУ*
B) первый координатный угол
C) первый и третий координатные углы
D) плоскость *XOУ*, за исключением осей *OX* и *OУ*
E) плоскость *XOУ*, за исключением кроме начала системы координат

169. Найти область определения функции $z = (x^2 + y^2) \cdot e^{\frac{x}{y}}$

A) плоскость *XOУ*
B) верхняя полуплоскость относительно оси *OX*
C) плоскость *XOУ*, за исключением начала системы координат
D) плоскость *XOУ*, за исключением осей *OX* и *OУ*
E) плоскость *XOУ*, за исключением оси *OX*

170. Найти область определения функции $z = (x^2 - y^2) \cdot e^x \cdot \sqrt{y}$

A) полуплоскость выше оси *OX*
B) плоскость *XOY*, за исключением прямой $y = -4$
C) полуплоскость правее оси *OY*
D) полуплоскость левее оси *OY*
E) плоскость *XOY*, за исключением прямых $y = \pm x$

171. Найти область определения функции $z = x\sqrt{-y} + x^2 - y^2$

A) плоскость *XOY*, за исключением прямых $y = \pm x$
B) полуплоскость ниже оси *OX*
C) полуплоскость левее оси *OY*
D) плоскость *XOY*, за исключением начала системы координат
E) плоскость *XOY*, за исключением прямой $y = 9$

172. Найти область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

A) внешность круга радиуса 1 с центром в начале системы координат ;
B) первая и третья координатные четверти;
C) вся плоскость *XOУ* за исключением начала системы координат;
D) окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат;
E) круг радиуса 1 с центром в точке O (0;0).

173. Найти область определения функции $z = \ln(x - y)$

A) плоскость XOY за исключением прямой $y=x$;

B) прямая $y=x$;

C) полуплоскость ниже биссектрисы I и III четверти;

D) полуплоскость ниже OX;

E) I и IV координатные углы.

174. Найти область определения функции $z = \dfrac{\ln x}{x^2 + y^2}$.

A)плоскость XOY; ;

B) плоскость XOY, кроме точки O (0;0);

C)полуплоскость правее оси OY ;

D) первый координатный угол;

E) плоскость, кроме осей координат.

175. Частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной x называется

A) $f_x'(x;y)$;

B) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$;

C) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y}$;

D) производная функции $f(x;y)$ по переменной x, вычисленная при условии, что переменная y зафиксирована;

E) производная функции $f(x;y)$ по переменной y, вычисленная при условии, что переменная x зафиксирована.

176. Частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной y называется

A) $f_y'(x;y)$

B) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$;

C) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y}$;

D) производная функции $f(x;y)$ по переменной x, вычисленная при условии, что переменная y зафиксирована;

E) производная функции $f(x;y)$ по переменной y, вычисленная при условии, что переменная x зафиксирована.

177. Частной производной функции $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ по переменной x_k называется

A) $f_{x_k}'(x_1, x_2, \dots, x_n)$; B) $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x_1}$; C) $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x_n}$;

D) производная функции z по переменной x_k, вычисленная при условии, что x_1 и x_n зафиксированы;

E) производная функции z по переменной x_k, вычисленная при условии, что все остальные аргументы, кроме x_k, зафиксированы.

E) $\Delta f(x_0; y_0) = f(x_0 - \Delta x; y_0 - \Delta y) - f(x_0; y_0)$.

201. Найти полное приращение функции $z = x + y(x-3)$ в точке (4; 0).

A) $\Delta y(\Delta x + 1)$
B) $\Delta x + \Delta x\Delta y$
C) $4\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$
D) $\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y + \Delta y$
E) $\Delta x\Delta y + \Delta x - 3\Delta y$

202. Найти полное приращение функции $z = (x-2)y$ в точке (2; 3).

A) $\Delta x\Delta y + 3\Delta x$
B) $\Delta x\Delta y - 2\Delta y$
C) $\Delta x\Delta y + 2\Delta y$
D) $2\Delta x\Delta y - 2\Delta x - 6\Delta y$
E) $\Delta x\Delta y + \Delta x + 5\Delta y$

203. Найти полное приращение функции $z = x^2 y + 4$ в точке (1; 2), если $\Delta x = 1, \Delta y = 2$.

204. Найти полное приращение функции $z = x^2 y - 2$ в точке (1; 2), если $\Delta x = -1, \Delta y = -2$.

205. Найти полное приращение функции $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ в точке (1; 0), если Δx=2, Δy=1.

206. Полный дифференциал функции $z=f(x;y)$ вычисляется по формуле:

A) $dz = z'_x \cdot \Delta y + z'_y \cdot \Delta x$
B) $dz = z'_x \cdot \Delta y - z'_y \cdot \Delta x$
C) $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$
D) $dz = z'_x \cdot \Delta x - z'_y \cdot \Delta y$
E) $dz = z'_y \cdot \Delta x - z'_x \cdot \Delta y$

207. Формула для вычисления полного дифференциала функции $z = f(x;y)$ имеет вид

A) $f'_x(x;y) + f'_y(x;y)$
B) $f'_x(x;y)\bar{i} + f'_y(x;y)\bar{j}$
C) $f'_x(x;y)\cos\alpha + f'_y(x;y)\cos\beta$
D) $f'_x(x;y) + 2f''_{xy}(x;y)\Delta x\Delta y + f'_y(x;y)$
E) $f'_x(x;y)\cdot\Delta x + f'_y(x;y)\cdot\Delta y$

208. Для функции $z = x^3 y^2$ вычислить dz (1; 2).

A) $3\Delta x + 2\Delta y$
B) $12\Delta x + 4\Delta y$
C) $3\Delta x - 2\Delta y$
D) $6\Delta x + 4\Delta y$
E) $12\Delta x + 2\Delta y$

209. Для функции $z = x^3 y + xy^2$ вычислить dz (2; 1).

A) $13\Delta x + 10\Delta y$
B) $12\Delta x + 10\Delta y$
C) $4\Delta x + 3\Delta y$
D) $8\Delta x + \Delta y$
E) $6\Delta x + 4\Delta y$

210. Для функции $z = x^3 y^2$ вычислить dz (1; 2) при Δx=-1, Δy=2.

211. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 y - 1}$ в точке (1; 2), если Δx=1, Δy=2.

212. Для нахождения приближенного значения дифференцируемой функции $f(x;y)$ в точке $(x;y)$, близкой к точке $(x_0; y_0)$, используется формула

A) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + df(x;y)$
B) $f(x;y) \approx df(x_0;y_0)$
C) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0)$
D) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0) + f'_y(x_0;y_0)$
E) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) - df(x;y)$

213. Для нахождения приближенного значения дифференцируемой функции $f(x;y)$ в точке $(x;y)$, близкой к точке $(x_0; y_0)$, используется формула

A) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0)$
B) $\Delta f(x_0;y_0) \approx df(x_0;y_0)(\Delta x + \Delta y)$
C) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) \cdot df(x_0;y_0)$
D) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) - df(x;y)$
E) $f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + df(x;y)$

214. С помощью полного дифференциала найти приближенно значение функции $z = e^{2x-3y}$ в точке x=2,9 и y=2,2.

215. С помощью полного дифференциала найти приближенно значение функции $z = \sqrt{2x+1} \cdot e^{3y}$ в точке x=4,3 и y=0,1.

216. С помощью полного дифференциала найти приближенно значение функции $z = \ln(4x - y)$ в точке x=1,2 и y=2,9.

217. С помощью полного дифференциала найти приближенно значение функции $z = \sin(3x - y)$ в точке x=0,9 и y=3,2.

218. Пусть $z = e^{5x}\sqrt{2y-3}$. На сколько приближенно изменится значение функции при увеличении x=0 на 0,1 и увеличении y=2 на 0,5.

219. Пусть $z = \ln(17 + x + 7y)$. На сколько приближенно изменится значение функции при уменьшении x=5 на 0,1 и увеличении y= -3 на 0,3.

220. Дифференциальным уравнением называется уравнение,…

A) содержащее дифференциал функции;
B) связывающее переменные x и y и неявно задающее дифференцируемую функцию $y(x)$;
C) связывающее аргумент x, искомую функцию $y(x)$ и некоторые ее производные;
D) связывающся переменные x и y, функцию этих переменных и некоторые ее частные производные;
E) для которого существует характеристическое уравнение.

221. Дифференциальным уравнением I порядка называется уравнение. связывающее

A) переменные x и y;
B) переменные x и y и задающее неявную функцию $y=y(x)$;
C) переменную x, функцию y и ее производную y';
D) искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$;
E) функцию двух переменных x и y и ее частные производные первого порядка.

222. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка:

A) $F(x, y, y^{(n)}) = 0$
B) $F(y, y', y'') = 0$
C) $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$
D) $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$
E) $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$

223. Общий вид дифференциального уравнения I порядка:

A) $y' = f(x;y)$
B) $F(x;y;y')=0$
C) F(x;y)=0
D) $F(x;y;z'_x;z'_y) = 0$
E) $F(x;y')=0$

224. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

A) $F(x, y') = 0$

B) $y = f(x)$

C) $y' = f(x, y)$

D) $F(x, y) = 0$

E) $y = f(x, y')$

225. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

A) $y' = f(x; y)$

B) $y' = f(x) \cdot \varphi(y)$

C) $y' = P(x) \cdot y + f(x)$

D) $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

E) $y' = f(x) + \varphi(y)$

226. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

A) $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

B) $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$

C) $F(x, y, y^{(n)}) = 0$

D) $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

E) $y^{(n)} = f(x)$

227. Решением дифференциального уравнения называется

A) число $x = x_0$ такое, что при подстановке его в уравнение получается верное равенство;

B) набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что при подстановке их в дифференциальное уравнение получается верное равенство;

C) функция $f(x; y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению;

D) неявная функция $y = y(x)$, заданная данным уравнением;

E) функция $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество относительно аргумента x.

228. Решением дифференциального уравнения называется

A) поиск функции $y(x)$, неявно заданной уравнением;

B) процесс разделения переменных с последующим интегрированием уравнения;

C) нахождение чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$, для которых искомая функция удовлетворяет заданному начальному условию;

D) функция $y(x)$, которая, будучи подставленной в уравнение вместе со своими производными, обращает его в тождество x;

E) функция $f(x; y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

229. Порядком дифференциального уравнения называется

A) порядок старшей производной, входящей в уравнение;

B) порядок наивысшей степени аргумента искомой функции;

C) количество переменных, входящих в уравнение;

D) количество слагаемых, содержащихся в уравнении;

E) порядок наивысшей степени искомой функции данного уравнения.

230. Найти порядок дифференциального уравнения $(x^2 + y^2)^2 + xy' = 0$.

231. Найти порядок дифференциального уравнения $xy^5 + y''' = 0$.

232. Найти порядок дифференциального уравнения $\dfrac{x^2 + 1}{y''} + y^2 = 0$.

A) -2 B) 2 C) -1 D) 0 E) 4

233. Какое из нижеперечисленных уравнений не является дифференциальным

A) $(x^2+1)y^{(4)}+y^2\cdot x=0$
D) $(x+1)y^4+y\cdot x^2=0$
B) $(x+y)dx+(2x-y^2)dy=1$
E) $y\cdot y^{(5)}=0$
C) $\frac{\sin x}{y'}-xy=0$

234. Какое из нижеперечисленных уравнений не является дифференциальным

A) $\sin(x+y')=0$
B) $(x+2y)dx+e^x dy=0$
C) $yy^4=0$
D) $y''+\frac{1}{y'}=0$
E) $y'=x$

235. Проверить, какая функция является решением дифференциального уравнения $(1+x)y'-y+1=0$.

A) $y=x-1$ C) $y=x$ D) $y=-x$
B) $y=x+1$ E) $y=-x+1$

236. Проверить, какая функция является решением дифференциального уравнения $xy'-y=1$.

A) $y=x-1$ C) $y=x$ D) $y=-x$
B) $y=x+1$ E) $y=-x+1$

237. Проверить, какая функция является решением дифференциального уравнения $yy'=x$.

A) $y=x-1$ C) $y=-x$ E) $y=x-2$
B) $y=-x+1$ D) $y=x+2$

238. Дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

A) $y'=f(x)+\varphi(y)$
B) $y'=f(x)\cdot\varphi(y)$
C) $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
D) $y'+\varphi(x)y=f(x)$
E) $y'+\frac{\varphi(x)}{y}=f(x)$

239. Дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

A) $M(x;y)dx+P(x;y)dy=0$
D) $N(y)dx+P(x)dy=0$
B) $M(x)\cdot N(y)\cdot dx+P(x)\cdot Q(y)\cdot dy=0$
E) $M(x)\cdot dx+Q(y)dy=0$
C) $(M(x)+N(y))\cdot dx+(P(x)+Q(y))dy=0$

240. Дифференциальным уравнением I порядка с разделенными переменными называется уравнение вида:

A) $y'=f(x)\cdot\varphi(y)$
D) $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$
B) $y'+\varphi(x)y=0$
E) $\varphi(y)dy+q(x)dx=0$
C) $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

241. Однородным дифференциальным уравнением I порядка называется уравнение вида $y'=f(x;y)$, в котором функция $f(x;y)$ для любого $t\in(-\infty;+\infty)$ удовлетворяет условию

A) $f(tx;ty)=f(x;y)$
D) $f(tx;y)=t\cdot f(x;y)$
B) $f(tx;ty)=t\cdot f(x;y)$
E) $f(x;ty)=t\cdot f(x;y)$
C) $f(tx;y)=f(x;ty)$

242. Однородным дифференциальным уравнением I порядка называется уравнение вида $y' = f(x; y)$, в котором функция $f(x;y)$ для любого $t \in (-\infty;+\infty)$ удовлетворяет условию

A) $f(tx; ty) = t \cdot f(x; y)$
B) $f(-tx; -ty) = tf(x; y)$
C) $f(tx; ty) = f(x;y)$
D) $f(-tx; -ty) = -f(x;y)$
E) $f(-tx; -ty) = -tf(x; y)$

243. Линейным дифференциальным уравнением I порядка называется уравнение вида:

A) $y' = f(x) + P(y)$
B) $y' = f(x) \cdot P(y)$
C) $y' = P(\frac{y}{x})$
D) $y' + P(x) \cdot y = f(x)$
E) $y' + \frac{P(x)}{y} = f(x)$

244. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

A) $y' = f(1; \frac{y}{x})$
B) $f(y)dy = -f(x)dx$
C) $y' = f(x, y)$
D) $f(x)dy + f(y)dx = 0$
E) $y' + P(x)y = f(x)$

245. Дифференциальное уравнение $y' + x^2 \cdot y = e^x$ является

A) линейным дифференциальным уравнением I порядка;
B) дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными;
C) однородным дифференциальным уравнением I порядка;
D) дифференциальным уравнением I порядка с разделенными переменными;
E) среди ответов A-D нет правильного.

246. Дифференциальное уравнение $y' = \frac{2x+3y}{x-y}$ является

A) линейным дифференциальным уравнением I порядка;
B) дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными;
C) однородным дифференциальным уравнением I порядка;
D) дифференциальным уравнением I порядка с разделенными переменны ми;
E) среди ответов A-D нет правильного.

247. Дифференциальное уравнение $y' = x \cdot y^2 - 3x \cdot \cos y$ является

A) линейным дифференциальным уравнением I порядка;
B) дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными;
C) однородным дифференциальным уравнением I порядка;
D) дифференциальным уравнением I порядка с разделенными переменными;
E) среди ответов A-D нет правильного.

248. Дифференциальное уравнение $y' - \frac{x}{y} = e^x$ является

A) линейным дифференциальным уравнением I порядка;

B) дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными;
C) однородным дифференциальным уравнением I порядка;
D) дифференциальным уравнением I порядка с разделенными переменными;
E) среди ответов A-D нет правильного.

249. Среди следующих дифференциальных уравнений найти линейное дифференциальное уравнение I порядка

A) $y' - \frac{3x}{y} = x^2$
B) $y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$
C) $y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$
D) $y' + xy = xy^3$
E) $y'' + 3y' + 2y = x$

250. Среди следующих дифференциальных уравнений найти однородное дифференциальное уравнение I порядка

A) $y' + x \cdot \sin y = 0$
B) $y' = \frac{y^2}{x^2}$
C) $y' = x^2 \cdot y^2$
D) $y' + y + x = 0$
E) $y' = \frac{x+2}{x+y}$

251.Среди следующих дифференциальных уравнений найти дифференциальное уравнение I порядка с разделяющимися переменными

A) $y' + xy = xy^3$
B) $y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$
C) $y' + y + x = 0$
D)$y'=x^2+y^2$
E) $(x+y)dx+ydy=0$

252. Решить уравнение $yy' + x = 0$

A) $x^2 - y^2 = C$
B) $x^2 + y^2 = 0$
C) $y^2 - x^2 = C$
D) $y^2 + x^2 = C$
E) $2x + 2y = C$

253. Решить дифференциальное уравнение $\frac{y'}{x} - x = 0$.

A) $y = \frac{x^3}{3} + C$
B)$y=x^2+C$
C)$y=x^3+C$
D)$y=2x^2+C$
E) $y = \frac{3}{x} + C$

254. Решить уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x$

A) $y = Cx^3$
B) $y = x^2 + C$
C) $y = -\frac{1}{x} + C$
D) $y = Cx^3 - x$
E) $y = Cx^3 - x^2$

255. Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^x$

A) $y = xe^x + c$
B) $y = e^x + ce^x$
C) $y = ce^x + xe^x$
D) $y = ce^x - xe^x$
E) $y = e$

256. Решить дифференциальное уравнение $xdy = ydx$

A) $y = xc$

B) $\ln|y| = \ln|x|$

C) $y = x + c$

D) $y = x$

E) $y = \ln|x| + c$

257. Найти частное решение дифференциального уравнения $ydy = xdx$, удовлетворяющее начальному условию $y(-2)=4$.

A) $y^2 = x^2 - 12$

B) $y^2 = x^2$

C) $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 6$

D) $y^2 = x^2 - 6$

E) $y^2 = x^2 + 12$

258. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = \frac{x^2}{y^2}dx$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$.

A) $y = x + 2$

B) $y^3 = x^3 - \frac{8}{3}$

C) $y^3 = x^3 + 8$

D) $y = x^2 + 2$

E) $y^2 = x^2 + 4$

259. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = x$, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 4$.

A) $y = x^2$

B) $y = \frac{x^2}{2}$

C) $y = 2x^2 - 4$

D) $y = x^2 + 2$

E) $y = \frac{x^2}{2} + 2$

260. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -\sin^2 y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

A) $\operatorname{ctg} y = -x - 1$

B) $\operatorname{tg} y = x + 1$

C) $\operatorname{tg} y = x$

D) $\operatorname{ctg} y = x$

E) $\operatorname{ctg} y = x + 1$

261. Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{-x}y' - e^{-y} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

A) $y = x$

B) $y = -x$ C) y

C) $y = 1 - e^x$

D) $y = e^{-x} - 1$

E) $y = e^x - 1$

262. Решение дифференциального уравнения I порядка с разделяющимися переменными осуществляется с помощью замены

A) $y = x + z(x)$

B) $y = u(x) \cdot v(x)$

C) $y' = \frac{dy}{dx}$

D) $\frac{y}{x} = z$

E) $y = u(x) + v(x)$

263. Решение однородного дифференциального уравнения I порядка осуществляется с помощью замены

A) $y = x + z(x)$

B) $y = u(x) \cdot v(x)$

C) $y' = \frac{dy}{dx}$

D) $\frac{y}{x} = z$

E) $y = u(x) + v(x)$

264. Решение линейного дифференциального уравнения I порядка осуществляется с помощью замены

A) $y = x + z(x)$

B) $y = u(x) \cdot v(x)$

C) $y' = \frac{dy}{dx}$

D) $\frac{y}{x} = z$

E) $y = u(x) + v(x)$

265. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит

A) n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

B) n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

C) n-1 произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$

D) n частных решений

E) одну произвольную постоянную C

266. Общим решением дифференциального уравнения II порядка называется функция вида:

A) $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ C) $y=\varphi(x,c_1,c_2,c_3)$ E) $y'=\varphi(x,y,c_1,c_2)$

B) $y=\varphi(x;c)$ D) $y'=\varphi(x,y,c)$

267. Начальные условия задачи Коши для дифференциального уравнения $y''=f(x,y,y')$ имеют вид:

A) $y(x_0)=y_0$ D) $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$

B) $y'(x_0)=y'_0$ E) $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0$

C) $y''(x_0)=y''_0$

268. Линейным однородным дифференциальным уравнением II порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

A) $y''+P\cdot y'+q\cdot y=kx+b$ D) $y''+P(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=kx+b$

B) $y''+P\cdot y'+q\cdot y=0$ E) $y''+P\cdot y'+q\cdot y+C=0$

C) $y''+P\cdot y'+q\cdot y=f(x)$

269. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением II порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

A) $y''+Py'+qy=C$

B) $y''+Py'+qy=0$

C) $y''+Py'+qy=R_n(x)$, где $R_n(x)$ –многочлен порядка n

D) $y''+Py'+qy=f(x)$, где $f(x)\neq 0$произвольная функция

E) $y''+Py'+qy=e^{\alpha x}$, $\alpha\neq 0$

270. Характеристическим уравнением дифференциального уравнения $y''+Py'+qy=0$ называется уравнения вида

A) $p\cdot k+q=0$ C) $k''+Pk'+q=0$ E) $k^2+Pk+q=0$

B) $k^2+Pk+qk=0$ D) $1+pk+qk^2=0$

271. Пусть характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

A) $y=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot\cos k_2x$ D) $y=e^{k_1x}\cdot(C_1\cdot\cos k_2x+C_2\cdot\sin k_2x)$

B) $y=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot x\cdot e^{k_2x}$ E) $y=C_1\cdot\cos k_1x+C_2\cdot\cos k_2x$

C) $y=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_2x}$

272. Пусть характеристическое уравнение имеет один двукратный действительный корень k. Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

A) $y=C_1\cdot e^{kx}+C_2\cdot e^{kx}$ D) $y=C_1\cdot\cos kx+C_2\cdot x\cdot\sin kx$

B) $y=C_1\cdot e^{kx}+C_2\cdot x\cdot e^{kx}$ E) $y=e^{kx}\cdot(C_1+C_2\cdot x\cdot\cos kx)$

C) $y=C_1\cdot\cos kx+C_2\cdot\sin kx$

273. Пусть характеристическое уравнение имеет два различных комплексных корня $\alpha\pm i\beta$. Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

A) $y=C_1\cdot e^{\alpha x}+C_2\cdot e^{\beta x}$

B) $y=C_1\cdot e^{\alpha x}+C_2\cdot x\cdot e^{\beta x}$

C) $y=C_1\cdot\cos\alpha x+C_2\cdot\sin\beta x$

D) $y=e^{\alpha x}\cdot(C_1\cdot\cos\beta x+C_2\cdot\sin\beta x)$

E) $y=e^{\alpha x}\cdot(C_1+C_2\cdot\cos\beta x)$

274. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+y'-2y=0$.

A) $y=C_1e^x+C_2$
B) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$
C) $y=C_1+C_2e^{-2x}$
D) $y=C_1x+C_2e^{-2x}$
E) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

275. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+3y=0$.

A) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$
B) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$
C) $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$
D) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$
E) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}$

276. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-2y'=0$.

A) $y=C_1e^{2x}+C_2e^x$
B) $y=C_1e^{-2x}+C_2x$
C) $y=C_1+C_2e^{2x}$
D) $y=C_1x+C_2e^{2x}$
E) $y=C_1+C_2e^{-2x}$

277. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-2y'+y=0$.

A) $y=C_1+C_2x$
B) $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$
C) $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$
D) $y=C_1+C_2e^x$
E) $y=e^x(C_1+C_2x)$

278. Найти общее решение дифференциального уравнения $4y''+4y'+y=0$.

A) $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$
B) $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$
C) $y=C_1e^{-x}+C_2x$
D) $y=e^x(C_1+C_2x)$
E) $y=C_1+C_2x$

279. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'+5y=0$.

A) $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$
B) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$
C) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$
D) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$
E) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

280. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+2y'+10y=0$.

A) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$
B) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin 3x)$
C) $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin x)$
D) $y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$
E) $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

281. Решить уравнение $y''-2y'+y=0$.

A) $y=C_1e^x+C_2e^x$
B) $y=C_1x+C_2e^x$
C) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^x$
D) $y=C_1e^x+C_2xe^x$
E) $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$

282. Решить уравнение $y''-3y'+2y=0$

A) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$
B) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$
C) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$
D) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$
E) $y=C_1e^x+C_2xe^{2x}$

283. Интегральной суммой для функции $f(x,y)$ называется выражение вида

A) $\sum_{i=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$　　B) $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i y_i$　　C) $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$

D) $\lim\limits_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$　　E) $\sum_{i=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$

284. Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D называется

A) $\sum_{i=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$, если существует и не зависит от способа разбиения D

B) $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i y_i$, если существует и не зависит от выбора точек P_i

C) $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$, если существует и не зависит от способа разбиения D и от выбо ра точек P_i

D) $\lim\limits_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$, если существует и не зависит от способа разбиения D и от выбора точек P_i

E) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$, если существует и не зависит от способа разбиения D и от выбора точек P_i

285. Двойной интеграл от неотрицательной функции $f(x, y)$ по области D равен

A) площади области D

B) объему цилиндрического тела, ограниченного плоскостью $z = 0$ и поверхностью $z = f(x, y)$

C) объему цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверх ностью $z = f(x, y)$

D) объему цилиндрического тела, образующая которой параллельна оси z, ограниченного областью D и поверхностью $z = f(x, y)$

E) площади поверхности $z = f(x, y)$, проектируемой на область D

286. $\iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy$, где $\gamma(x, y)$ - поверхностная плотность вещества, равен

A) массе цилиндрического тела, ограниченного плоскостью $z = 0$, поверхностью $z = |\gamma(x, y)|$

B) массе пластины, занимающей область D;

C) массе цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверхностью $z = |\gamma(x, y)|$;

D) массе тела, ограниченного поверхностью $z = \gamma(x, y)$ и плоскостью $x0y$

E) массе поверхности $z = \gamma(x, y)$, проектируемой на область D

287. Укажите свойство, которым не обладает двойной интеграл.

A) $\iint\limits_D [f(x,y)+\varphi(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$

B) $\iint\limits_D af(x,y)dxdy = a\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

C) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

D) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = -\iint\limits_D f(x,y)dydx$

E) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dydx$

288. Укажите свойство, которым не обладает двойной интеграл.

A) $\iint\limits_D [f(x,y)+\varphi(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$

B) $\iint\limits_D f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dx \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$

C) $\iint\limits_D af(x,y)dxdy = a\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

D) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

E) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dydx$

289. Область D называется правильной в направлении оси OX, если

A) прямая, параллельная одной из координатных осей и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

B) прямая, параллельная оси OX и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

C) прямая, параллельная оси OY и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

D) прямая, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

E) прямая пересекает границу области в двух точках.

290. Область D называется правильной в направлении оси OY, если

A) прямая, параллельная одной из координатных осей и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

B) прямая, параллельная оси OX и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

C) прямая, параллельная оси OY и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

D) прямая, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

E) прямая пересекает границу области в двух точках.

291. Область D называется правильной, если

A) прямые, параллельные координатным осям и проходящие через внутреннюю точку области, пересекают границу области в двух точках;

B) прямая, параллельная оси OX и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

C) прямая, параллельная оси OY и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

D) прямая, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках;

E) прямая пересекает границу области в двух точках.

292. Двукратным интегралом по области D называется выражение

A) $\int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy$ B) $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$ C) $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx\right]dy$

D) $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$ E) $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_a^b f(x,y)dy\right]dx$

293. Если $f(x,y)$ непрерывная функция в правильной области D, то

A) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy$ B) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_a^b f(x,y)dy\right]dx$

C) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx\right]dy$ D) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$

E) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$

294. Если $f(x,y)$ непрерывная функция в области D, правильной в направлении оси OX, то

A) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$ B) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dy\right]dx$

C) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$ D) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dx\right]dy$

E) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$

295. Вычислить $\iint\limits_Д (x+y)dxdy;\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 0 E) 5

296. Вычислить $\iint\limits_Д e^{x+y}dxdy;\quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

A) $(e-1)^2$ B) $(e-1)$ C) $(e-1)^3$ D) $(e-1)^{-1}$ E) $(e-1)^{-2}$

297. Вычислить $\iint\limits_Д \rho d\rho d\theta;\quad \frac{b}{2} \le \rho \le b;\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

A) $\frac{в^2\pi}{16}$ B) $\frac{3}{16}\pi$ C) $\frac{3в^2\pi}{16}$ D) $\frac{в^2}{16}$ E) $\frac{в}{16}$

298. Вычислить $\iint\limits_{Д} \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$ $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

A) ln3 B) e C) ln4 D) ln(4/3) E) (e-1)

299. Вычислить $\iint\limits_{Д} x\sin(x+y)\,dxdy;$ $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

A) $\pi - 3$ B) $\pi - 2$ C) $\pi - 4$ D) $\pi - 1$ E) π

300. Вычислить $\iint\limits_{Д} \frac{x^2}{y^2}dxdy;$ Д – область, ограниченная линиями y=x, x=2 и xy=1

A) 5/4 B) 7/4 C) 9/4 D) 3/4 E) ¼

301. Вычислить $\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} xydxdy$

A) 17/4 B) 4 C)1 D) 15/4 E) 17/2

302. Вычислить $\int\limits_{3}^{4}\int\limits_{1}^{2} \frac{dydx}{(x+y)^2}$

A) $\ln\frac{25}{24}$ B) $\ln\frac{27}{24}$ C) $\ln\frac{29}{24}$ D) 0 E) $\ln\frac{24}{25}$

303. Вычислить $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{a\sin\theta}^{a} \rho d\rho d\theta$

A) πa^2 B) $\frac{1}{2}\pi a^2$ C) $\frac{1}{3}\pi a^2$ D) 0 E) $\frac{1}{4}\pi a^2$

304. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{\sqrt{x}} f(x;y)dy$

A) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y^2}^{y} f(x;y)dx$ B) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y}^{y^2} f(x;y)dx$ C) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{x}^{\sqrt{x}} f(x;y)dx$

D) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x;y)dx$ E) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{y} f(x;y)dx$

305. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{3}^{4} f(x;y)dy$

A) $\int\limits_{1}^{4}dy\int\limits_{3}^{2} f(x;y)dx$

B) $\int\limits_{3}^{2}dy\int\limits_{1}^{4} f(x;y)dx$

C) $\int\limits_{3}^{4}dy\int\limits_{1}^{2} f(x;y)dx$

D) $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{3}^{4} f(x;y)dx$

E) $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{0}^{4} f(x;y)dx$

306. $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|dudv$ - формула

A) замены переменной в двойном интеграле
B) перехода к криволинейным координатам в двойном интеграле
C) перехода к полярным координатам в двойном интеграле
D) замены переменной в неопределенном интеграле
E) замены переменной в определенном интеграле

307. $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$ - это формула

A) замены переменной в двойном интеграле
B) интегрирования по частям в определенном интеграле
C) перехода к полярным координатам в двойном интеграле
D) замены переменной в неопределенном интеграле
E) замены переменной в определенном интеграле

308. Интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ называется выражение вида

A) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(P_i)\Delta V_i$ B) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$ C) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$

D) $\lim\limits_{diam\Delta V_i \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ E) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$

309. Тройным интегралом от функции $z=f(x,y,z)$ по области V называется

A) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(P_i)\Delta V_i$, если существует; B) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$, если существует;

C) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$, если существует; D) $\lim\limits_{diam\Delta V_i \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$, если существует;

E) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$, если существует.

310. Укажите свойство, которым не обладает тройной интеграл.

A) $\iiint\limits_{V}[f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V}\varphi(x,y,z)dxdydz$

B) $\iiint\limits_{V} af(x,y,z)dxdydz = a\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz$

C) $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$

D) $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = -\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dydxdz$

E) $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dydxdz$

311. Укажите свойство, которым не обладает тройной интеграл.

A) $\iiint\limits_{V}[f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V}\varphi(x,y,z)dxdydz$

B) $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\varphi(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dx \iiint\limits_{V}\varphi(x,y,z)dxdy$

C) $\iiint\limits_V af(x,y,z)dxdydz = a\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

D) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$

E) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dydxdz$

312. Трехкратным интегралом по области V называется выражение

A) $\int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz$

B) $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dx \right) dy \right] dz$

C) $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx$

D) $\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right] dz$

E) $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx$

313. Если $f(x,y,z)$ непрерывная функция в правильной области V, то

A) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz$

B) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dx \right) dy \right] dz$

C) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx$

D) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right] dz$

E) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx$

314. Вычислить $\iiint\limits_V (x+y)\,zdxdydz;\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2, 0 \le z \le 1.$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 0 E) 5

315. Вычислить $\iiint\limits_V x\sqrt{y}zdxdydz;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2.$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

316. Вычислить $\iiint\limits_V (x-y)\,dxdydz;\ 0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le в,\ 0 \le z \le 1.$

A) $\frac{1}{6}a^2в^2(a-в)$ B) $\frac{aв}{2}(a-в)$ C) $(a-в)$ D) $a^2в^2$ E) $aв$

317. Вычислить $\iiint\limits_V \rho d\rho d\theta dz;\quad \frac{b}{2} \le \rho \le b;\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le z \le 1.$

A) $\frac{в^2\pi}{16}$ B) $\frac{3}{16}\pi$ C) $\frac{3в^2\pi}{16}$ D) $\frac{в^2}{16}$ E) $\frac{в}{16}$

318. Вычислить $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) z dxdydz;\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1.$

A) 4/3 B) 4 C) 1 D) 0 E) 8/3

319. Вычислить $\iiint\limits_V e^{x+y} dxdydz;\quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

A) $(e-1)^2$ B) (e-1) C) $(e-1)^3$ D) $(e-1)^{-1}$ E) $(e-1)^{-2}$

320. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+1)^2}\quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

A) ln3 B) e C) ln4 D) ln(4/3) E) (e-1)

321. Числовым рядом называется выражение:

A) $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

B) $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

C) $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

D) $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

E) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

322. Написать первые 4 члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n-1}$:

A) $\frac{7}{2}-\frac{9}{5}+\frac{11}{8}-\frac{13}{11}+\ldots$ B) $\frac{7}{2}-\frac{9}{4}+\frac{11}{6}-\frac{13}{8}+\ldots$ C) $\frac{7}{2}+\frac{9}{5}+\frac{11}{8}+\frac{13}{11}+\ldots$

D) $\frac{7}{2}+\frac{9}{4}+\frac{11}{6}+\frac{13}{8}+\ldots$ E) $\frac{7}{2}+\frac{11}{8}+\frac{15}{14}+\frac{19}{20}+\ldots$

323. Написать формулу общего члена ряда $\frac{2}{1}+\frac{4}{2^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{8}{4^4}+\ldots$

A) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$ B) $a_n = \frac{2^n}{n^4}$ C) $a_n = \frac{2n}{n^4}$ D) $a_n = \frac{2n}{n^n}$ E) $a_n = \frac{2n}{n^{2n}}$

324. Написать формулу общего члена ряда $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots$

A) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ B) $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ C) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ D) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^5}}$ E) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

325. Написать формулу общего члена ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$

A) $a_n = \frac{2n+1}{2^n}$ B) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$ C) $a_n = \frac{2n-1}{2}$ D) $a_n = \frac{2^n-1}{2}$ E) $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

326. n – частичной суммой ряда называется

A) сумма n членов ряда;

B) сумма первых n членов ряда;

C) предел суммы первых членов ряда;

D) предел суммы n членов ряда;

E) сумма конечного числа первых членов ряда.

327. Суммой ряда называется

A) сумма всех членов ряда;
B) предел n-частичной суммы ряда при $n \to \infty$;
C) предел суммы первых членов ряда;
D) конечный предел n-частичной суммы ряда при $n \to \infty$;
E) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

328. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

329. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(3n-1)(3n+5)}$

330. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(3n-2)(3n+4)}$

331. Числовой ряд называется сходящимся, если
A) существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$;
B) существует сумма всех членов ряда;
C) n-ый член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$;
D) существует предел n-частичной суммы;
E) существует сумма первых n членов ряда.

332. Числовой ряд называется расходящимся, если
A) n-частичная сумма ряда равна бесконечности;
B) не существует конечный предел n-частичной суммы ряда при $n \to \infty$;
C) n-ый член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$;
D) существует предел n-частичной суммы ряда;
E) сумма первых n членов ряда равна конечному числу.

333. Укажите сходящийся ряд:
A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ E) $\sum\limits_{n=1}^{n} 2^{n-1}$

334. Укажите сходящийся ряд:
A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0,5q^{n-1}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n$

335. Укажите расходящийся ряд:
A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

336. Укажите расходящийся ряд:
A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2q^{n-1}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

337. Ряд с положительными членами вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$
A) сходится, если $a < 1$; B) расходится, если $a < 1$;
C) сходится, если $q > 1$; D) сходится, если $q < 1$;

E) сходится, если $q \leq 1$.

338. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

A) сходится, если $p > 1$; B) сходится, если $p \geq 1$;

C) расходится, если $p \geq 1$; D) сходится, если $p \leq 1$;

E) расходится при любых значениях p.

339. Отбрасывание конечного числа членов числового ряда

A) приводит к сходимости ряда;

B) не влияет на сходимость ряда;

C) может привести к сходящемуся ряду;

D) не изменяет сумму ряда;

E) изменяет сумму ряда.

340. Если сходящийся ряд с суммой s почленно умножить на число c, то:

A) получится расходящийся ряд, если c достаточно большое;

B) сумма ряда не изменится;

C) получится сходящийся ряд с суммой cs;

D) получится расходящийся ряд;

E) получится сходящийся ряд.

341. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то

A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ расходится;

B) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ сходится;

C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ могут расходиться;

D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ может сходиться;

E) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ сходятся.

342. Если числовой ряд сходится, то

A) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$, где c>0; B) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; C) $S_n = S$;

D) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ E) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ или не существует.

343. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то

A) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$; B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится;

D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться; E) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

344. Если числовые ряды с положительными числами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) таковы, что $u_n \le v_n$ (n=1,2,3,...), то

A) из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2);
B) из расходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2);
C) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
D) из сходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1);
E) из сходимости ряда (1) следует расходимость ряда (1).

345. Если числовые ряды с положительными числами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) таковы, что $u_n \le v_n$ (n=1,2,3,...), то

A) из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2);
B) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2);
C) из расходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
D) из сходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1);
E) из сходимости ряда (1) следует расходимость ряда (1).

346. Укажите признак Даламбера:

A) если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, то ряд сходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = q$, то ряд сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$;

D) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то ряд сходится при $q=1$ и расходится при $q \ne 1$;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то ряд сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$.

347. Выберите правильное утверждение:

A) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, то ряд сходится;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \ne 1$, то ряд сходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, то ряд расходится;

D) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то ряд сходится;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, то ряд расходится.

348. Выберите неверное утверждение:

A) если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то ряд расходится;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}>1$, то ряд расходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, то ряд сходится;

D) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то ряд может сходиться;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}<1$, то ряд расходится.

349. Числовой ряд с положительными членами сходится, если

A) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\neq 0$ B) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\neq 1$ C) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>0$

D) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ E) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

350. Числовой ряд с положительными членами расходится, если

A) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\neq 0$ B) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\neq 1$ C) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>0$

D) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ E) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

351. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{4^n}$ на сходимость.

A) расходится B) сходится C) сходится абсолютно
D) сходится условно E) сходится равномерно

352. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)n}$ на сходимость.

A) расходится B) сходится C) сходится абсолютно
D) сходится условно E) сходится равномерно

353. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ на сходимость.

A) сходится абсолютно B) сходится C) расходится
D) сходится условно E) сходится равномерно

354. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ на сходимость.

A) расходится D) сходится
B) сходится условно E) сходится равномерно
C) сходится абсолютно

355. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ на сходимость.

A) расходится B) сходится равномерно

C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится

356. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

357. Исследовать ряд $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+...$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

358. Исследовать ряд $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+...$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

359. Исследовать ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+...$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

360. Укажите признак Коши:

A) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=0$, то ряд сходится;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд расходится, а при $q>1$ сходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то ряд расходится;

D) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ расходится;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q\neq 1$ ряд может сходиться или расходиться.

361. Выберите правильное утверждение:

A) если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд может сходиться;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то ряд расходится;

D) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}<1$, то ряд сходится;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\neq 0$, то ряд расходится

362. Выберите неверное утверждение:

A) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=0$, то ряд расходится;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд сходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то ряд может сходиться;

D) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд расходится;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\leq 1$, то ряд может сходиться.

363. Знакочередующийся ряд сходится, если…

A) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

B) $u_1>u_2>u_3>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

C) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n<u_1$

D) $u_1>u_2>u_3>\ldots$

E) $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n<1$

364. Дан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, где $u_n>0$. Выберите правильное утверждение.

A) если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится;

B) если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$, то ряд сходится;

C) если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n<1$, то ряд сходится;

D) если $u_1>u_2>u_3>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится;

E) если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n>0$, то ряд может сходиться.

365. Дан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, где $u_n>0$. Выберите неверное утверждение.

A) если $u_1>u_2>u_3>\ldots$, то ряд сходится;

B) если $u_1>u_2>u_3>\ldots$ то ряд может сходиться;

C) если $u_{n+1}<u_n$ для всех $n\geq N$, то ряд может сходиться;

D) если $u_{n+1}<u_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится и его сумма $S\in(0;u_1)$;

E) если $u_{n+1}<u_n$ для всех $n\geq N$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится.

366. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$ с точностью до 0,01.

367. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ с точностью до 0,01.

368. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$ с точностью до 0,001.

369. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ с точностью до 0,001.

370. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$ с точностью до 0,0001.

371. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

372. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+1}$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

373. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ на сходимость.

A) расходится
B) сходится
C) сходится абсолютно
D) сходится условно
E) сходится равномерно

374. Выберите правильное утверждение:

A) если сходится знакопеременный ряд, то ряд из абсолютных величин его членов расходится;
B) если сходится знакопеременный ряд, то ряд из абсолютных величин его членов сходится;
C) если сходится знакопеременный ряд, то ряд из абсолютных величин его членов может сходиться;
D) если сходится знакочередующийся ряд, то ряд из абсолютных величин его членов сходится;

E) если сходится знакочередующийся ряд, то ряд из абсолютных величин его членов расходится.

375. Выберите неверное утверждение:
A) если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда, то знакопеременный ряд сходится;
B) если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда, то знакопеременный ряд сходится абсолютно;
C) если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, то знакочередующийся ряд сходится;
D) если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда, то знакопеременный ряд может сходиться;
E) если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, то знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

376. Функциональным рядом называется ряд,...
A) среди членов которого имеются функции;
B) если хотя бы один член ряда является функцией;
C) членами которого являются функции;
D) членами которого являются функции вида $a_n x^n$;
E) членами которого являются функции вида $a_n(x-a)^n$.

377. Областью сходимости функционального ряда называется...
A) множество значений x, при которых функциональный ряд сходится;
B) интервал (-R, R), если при $|x|>R$ функциональный ряд расходится;
C) интервал (-R, R), если при $|x|>R$ функциональный ряд сходится;
D) интервал (-R, R), если при $x>R$ функциональный ряд сходится;
E) множество значений x, при которых функциональный ряд может сходиться.

378. Найдите интервал сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$.

A) $(-\infty;+\infty)$ B) (-2;2) C) (0;2) D) [-2;2] E) [-2;2)

379. Найдите интервал сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$.

A) $(-\infty;+\infty)$ B) (-2;2) C) (-1;1) D) [-1;1] E) (0;1)

380. Найдите интервал сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$.

A) (-1;1) B) [-1;1] C) $(-\infty;+\infty)$ D) $[-1;1)$ E) (-1;1]

381. Степенным рядом называется
A) ряд, членами которого являются степенные функции;

B) ряд вида $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$;

C) ряд вида $a_0+a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}+...$, где α_n - постоянные числа. числа;

D) ряд вида $a_0+a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}+...$, где α_n - целые положительные числа;

E) ряд вида $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$.

382. Интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ является

A) отрезок $[-R,R]$

B) интервал длиной $2R$

C) интервал (-R;R)

D) отрезок длиной $2R$

E) интервал $(0, R)$

383. Радиусом сходимости степенного ряда называется

A) величина, равная значению $x=x_0$, при котором ряд сходится;

B) длина области сходимости;

C) величина, равная значению $x=x_0$, при котором ряд может сходиться;

D) величина, равная половине длины области сходимости;

E) величина, равная значению $x=x_0$, при котором ряд может расходиться.

384. Ряд Тейлора имеет вид:

A) $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+...$

B) $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x+a)^n+R_n(x)$

C) $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$

D) $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

E) $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$, где

$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], 0<\theta<1$

385. Ряд Маклорена имеет вид:

A) $f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-n)^n}{n!}f^{(n)}(a)+...$

B) $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x+a)^n+R_n(x)$

C) $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$

D) $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

E) $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$, где

$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], 0 < \theta < 1$

386. Разложение функции $y = \sin x$ в ряд Маклорена имеет вид:

A) $\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$

B) $\sin x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$

C) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

D) $\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

E) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

387. Разложение в ряд Маклорена функции $y = e^x$ имеет вид:

A) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

B) $e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + ...$

C) $e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + ...$

D) $e^x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

E) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

388. Разложение в ряд Маклорена функции $y = e^{-x}$ имеет вид:

A) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

B) $e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + ...$

C) $e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + ...$

D) $e^x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

E) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

389. Разложение функции $y = \cos x$ в ряд Маклорена имеет вид:

A) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{2n-2}+...$

B) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+...$

C) $\cos x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+...+\frac{x^{2n-2}}{2n-2}+...$

D) $\cos x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+...$

E) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+...$

390. Разложите в биномиальный ряд функцию $y=\frac{1}{1+x}$.

A) $\frac{1}{1+x}=1+x+x^2+x^3+...$

B) $\frac{1}{1+x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...$

C) $\frac{1}{1+x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$

D) $\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+...$

E) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$

391. Разложение функции $y=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена имеет вид:

A) $\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$

B) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+...$

C) $\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

D) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+...$

E) $\ln(1+x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-...$

392. Разложение функции $y=\ln(1-x)$ в ряд Маклорена имеет вид:

A) $\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$

B) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+...$

C) $\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

D) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + \ldots$

E) $\ln(1+x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$

393. Вычислить $\iiint\limits_V e^{x+y} dxdydz;$ $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1.$

A) $(e-1)^2$ B) $(e-1)$ C) $(e-1)^3$ D) $(e-1)^{-1}$ E) $(e-1)^{-2}$

394. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+1)^2}$ $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1.$

A) ln3 B) e C) ln4 D) ln(4/3) E) (e-1)

395. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{a\sin\theta}^{a} \int\limits_0^1 \rho d\rho d\theta dz$

A) πa^2 B) $\frac{1}{2}\pi a^2$ C) $\frac{1}{3}\pi a^2$ D) 0 E) $\frac{1}{4}\pi a^2$

396. Вычислить $\iiint\limits_V x\sqrt{y} dxdydz;$ $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4,$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

397. Вычислить $\iiint\limits_V xy(x+y) dxdydz$; $0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 1,$ $0 \le z \le 1.$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

398. Вычислить $\iiint\limits_V xy(x-y) dxdydz$; $0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 2,$ $0 \le z \le 1.$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

399. Вычислить $\iiint\limits_V xy(x+y) dxdydz$; $0 \le x \le 2,$ $0 \le y \le 2,$ $0 \le z \le 1.$

A) $\frac{22}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{32}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

400. Вычислить $\int\limits_1^2 \int\limits_x^{x\sqrt{3}} \int\limits_0^1 xydxdydz$

A) 17/4 B) 4 C) 1 D) 15/4 E) 17/2

Литература

1. Дифференциальное и интегральное исчисление. Бугров Я.С., Никольский С.М. М.: Наука, 1985 г.
2. Высшая математика. Том 1. Гусак А.А. Мн.: Тетро Системс, 2001г.
3. Высшая математика. Том 2. Гусак А.А. Мн.: Тетро Системс, 2001г

4. Краткий курс математического анализа для вузов. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. М.: Наука, 1971 г.
5. Основы математического анализа. Ильин В.А., Позняк Э.Г.М.: Наука, 1982г.
6. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1 Пискунов Н.С. М.: Наука, 1985г.
7. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов . Т. 2 Пискунов Н.С. М.: Наука, 1985г.
8. Сборник задач по курсу математического анализа. Берман Г.Н. М.: Наука, 1985г.
9. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В. и Демидовича Б.П. М.: Наука, 1986г.
10. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа, часть 2. Под редакцией Ефимова А.В. и Демидовича Б.П. М.: Наука,1981г.
11. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике ч.1 Под редакцией Рябушко А.П. Минск.: Вышейшая школа, 2001г.
12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике ч.2 Под редакцией Рябушко А.П. Минск.: Вышейшая школа, 2001г.
13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике ч.3 Под редакцией Рябушко А.П. Минск.: Вышейшая школа, 2001г.
14. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч1,2 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. М.: Высшая школа, 1986г.
15. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). Кузнецов Л.А. М.: Высшая школа, 1983г.
16. Высшая математика ч. 1-5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Минск: Высшая школа, 1998г.
17. Высшая математика. Шипачев В. С. М: Высшая школа, 1985,1999г.
18. Сборник заданий по высшей математике. Минорский В.П. М.: Наука, 1987г.

15.Типовые расчеты по высшей математике. Ч.1-3. Хайруллин Е.М. Алматы, КазНТУ, 1982г.

Кужукеев Ж.М.

Учебное пособие

Математический анализ
(для студентов информационных специальностей)

Технический редактор Кужукеев Ж.М.

Сдано в набор 28.05. 2015 г.
Подписано в печать 04.06. 2015 г.
Формат 60x84 1/8. Бумага «Снегурочка»
Гарнитура Times New Roman
Усл. печ. л. 4.8. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в типографии КИнЭУ
110007, г. Костанай, ул. Чернышевского, 59
Тел. 8(7142)280259